NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Sur la somme des puissances semblables des nombres naturels

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 15 (1856), p. 230-235

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__230_1>

SUR LA SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES NATURELS;

PAR E. CATALAN

La plupart des traités d'algèbre donnent la relation générale

$$(n+1)[(n+1)^p - 1]$$
$$= \frac{p+1}{1} S_p + \frac{p+1}{1}\frac{p}{2} S_{p-1} + \ldots + \frac{p+1}{1} S_1,$$

dans laquelle S_p représente la somme des puissances p des n premiers nombres entiers. Cette relation permet de calculer assez rapidement les valeurs de S_1, S_2, S_3, S_4;

mais elle devient presque illusoire dès que l'indice p surpasse 4. Il y a dix ans, M. Puiseux, probablement frappé de cet inconvénient, donna, dans le *Journal* de M. Liouville, la valeur de S_p en fonction explicite de n et de p. Malheureusement, la méthode employée par ce savant géomètre est assez compliquée (*); en outre, les valeurs qu'il trouve pour les coefficients de S_p, très-satisfaisantes en théorie, le seraient fort peu s'il s'agissait de passer aux applications numériques (**).

La méthode suivante, dont le germe se trouve dans le grand ouvrage de Lacroix, sera peut-être, à cause de sa simplicité, capable d'intéresser les élèves.

I. On a identiquement

$$n^2 = n(n-1) + n.$$

En multipliant les deux membres par

$$n = (n-2) + 2 = (n-1) + 1,$$

on trouve

$$n^3 = n(n-1)(n-2+2 \left|\begin{array}{l} \\ +1 \end{array}\right. n(n-1) + n,$$

ou

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n.$$

Multipliant les deux membres de cette nouvelle égalité

(*) Cette observation, qui n'est pas une critique, s'applique également à un Mémoire de M. Pépin inséré dans les *Nouvelles Annales* (janvier 1856). Du reste, l'auteur, dont je n'ai connu le travail qu'après avoir terminé le mien, dit expressément, en parlant de la formule trouvée par M. Puiseux : « L'expression générale de la fonction $\varpi_{m,\alpha}$ est fort mal appropriée au calcul. »

(**) Par exemple, le coefficient 350 serait donné par ce calcul :

$$\frac{4^6 - 3\,3^6 + 3.2^6 - 1}{1.2.3} = \frac{4096 - 2187 + 192 - 1}{6} = \frac{2100}{6} = 350.$$

par

$$n = (n-3)+3 = (n-2)+2 = (n-1)+1,$$

on aura encore

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) \begin{array}{l} +3 \\ +3 \end{array} \Bigg| \, n(n-1)(n-2) \begin{array}{l} +6 \\ +1 \end{array} \Bigg| \, n(n-1)+n,$$

ou

$$n^4 = n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) \\ + 7n(n-1) + n.$$

La loi des résultats est actuellement évidente; de sorte qu'en désignant par $A_{n,p}$ le nombre des arrangements de n lettres, prises p à p, et par B_p, C_p,..., L_p, $(p-2)$ coefficients, indépendants de n, on peut écrire :

$$(\mathrm{A}) \quad n^p = A_{n,p} + B_p A_{n,p-1} + C_p A_{n,p-2} + \ldots + L_p A_{n,2} + n.$$

II. Pour démontrer, par le raisonnement connu, la généralité de cette relation et pour trouver la loi des coefficients, supposons

$$n^{p-1} \\ = A_{n,p-1} + B_{p-1} A_{n,p-2} + C_{p-1} A_{n,p-3} + \ldots + K_{p-1} A_{n,2} + n,$$

et multiplions les deux membres de cette égalité par

$$n = (n-p+1)+(p-1) = (n-p+2)+(p-2) = \ldots \\ = (n-1)+1,$$

nous aurons

$$n^p = A_{n,p} \begin{array}{l} +(p-1) \\ +B_{p-1} \end{array} \Bigg| \, A_{n,p-1} \begin{array}{l} +(p-2)B_{p-1} \\ +C_{p-1} \end{array} \Bigg| \, A_{n,p-2} + \ldots \begin{array}{l} +2K_{p-1} \\ +1 \end{array} \Bigg| \, A_{n,2} + n,$$

et, par conséquent,

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_p = B_{p-1} + (p-1), \\ C_p = C_{p-1} + (p-2)B_{p-1}, \\ D_p = D_{p-1} + (p-3)C_{p-1}, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ L_p = 1 + 2K_{p-1}. \end{array} \right.$$

III. Ainsi que l'a fait remarquer Lacroix (*), le calcul des coefficients B_p, C_p,..., L_p est fort simple. En effet, si l'on suppose successivement

$$p = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,$$

on trouve, par les formules (B),

p	A_p	B_p	C_p	D_p	E_p	F_p	G_p	H_p	K_p	L_p
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	6	7	1						
5	1	10	25	15	1					
6	1	15	65	90	31	1				
7	1	21	140	350	301	63	1			
8	1	28	266	1050	1701	966	127	1		
9	1	36	462	2646	6951	7770	3025	255	1	
10	1	45	750	19980	22827	42525	34105	9330	511	1

Il résulte, de la formation de ce tableau, que *le* $l^{\text{ième}}$ *terme d'une colonne verticale quelconque est égal au terme écrit au-dessus augmenté de* l *fois le terme placé à la gauche de celui-ci* (**). Par exemple

$$1701 = 301 + 4.350.$$

IV. Si l'on écrit ainsi les nombres contenus dans le

(*) Et aussi M. Pépin.

(**) Pour plus de régularité, on a représenté par A_p le coefficient de $A_{n,p}$ coefficient égal à l'unité. Le Mémoire de M. Pépin contient également le tableau ci-dessus.

tableau précédent :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	3	7	15	31	63	127	255	511	
1	6	25	90	301	966	3025	9330		
1	10	65	350	1701	7770	34105			
1	15	140	1050	6951	42525				
1	21	266	2646	22827					
1	28	462	19980						
1	36	750							
1	45								
1									

on voit que les termes de la première ligne horizontale sont tous égaux à l'unité, et que ceux de la deuxième ligne sont égaux aux puissances successives de 2, diminuées de l'unité. En outre, *un terme quelconque* $\mathrm{N}_{r,l}$ *occupant le rang* r *dans la* $l^{\text{ième}}$ *ligne horizontale, est égal à* l *fois le terme écrit à sa gauche, augmenté du terme écrit au-dessus*. Il n'est pas bien difficile de conclure de là :

$$(\mathrm{C})\ \mathrm{N}_{r,l} = \frac{1}{1.2.3\ldots(l-1)} \left[\begin{array}{c} l^{r+l-2} - \frac{l-1}{1}(l-1)\,l^{r+l-2} \\ + \frac{l-1}{1}\,\frac{l-2}{1}(l-2)^{r+l-2} - \ldots \pm 1 \end{array} \right].$$

Cette formule générale, beaucoup moins commode que la règle précédente, a été trouvée par M. Puiseux.

V. Revenant à l'équation (A), nous aurons, en changeant n en $n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$, et ajoutant,

$$(\mathrm{D}) \left\{ \begin{aligned} S_p = &\frac{1}{p+1} A_{n+1,p+1} + \frac{B_p}{p} A_{n+1,p} + \frac{C_p}{p-1} A_{n+1,p-1} + \ldots \\ &+ \frac{L_p}{3} A_{n+1,3} + \frac{1}{2} A_{n+1,2} \end{aligned} \right.$$

ou

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{aligned} S_p = &\frac{1}{p+1}(n+1)n(n-1)\ldots(n-p+1) \\ &+ \frac{B_p}{p}(n+1)n\ldots(n-p+2) \\ &+ \frac{C_p}{p-1}(n+1)n\ldots(n-p+3) + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{L_p}{3}(n+1)n(n-1) + \frac{1}{2}(n+1)n. \end{aligned} \right.$$

Par exemple, la somme des sixièmes puissances des nombres $1, 2, 3, \ldots, 10$ sera

$$\begin{aligned} &\frac{1}{7} 11.10.9.8.7.6.5 + \frac{15}{6} 11.10.9.8.7.6 + \frac{65}{5} 11.10.9.8.7 \\ &\quad + \frac{90}{4} 11.10.9.8 + \frac{31}{3} 11.10.9 + \frac{1}{2} 11.10 \\ &= 110(2160 + 7560 + 6552 + 1620 + 93) + 55 \\ &= 1\,978\,405. \end{aligned}$$

En effet,

$$\begin{aligned} 1^6 + 2^6 + \ldots + 10^6 = 1 &+ 64 + 729 + 4096 + 15625 \\ &+ 46\,656 + 117\,649 + 262\,144 \\ &+ 531\,441 + 1\,000\,000 = 1\,978\,405. \end{aligned}$$