

**Sur les fractions continues algébriques,
d'après Gauss**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 15
(1856), p. 207-211

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1856_1_15__207_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1856, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÈBRIQUES ;
D'APRÈS GAUSS.

Met. nova. integr. Comm. Gotting. vol. II, 1814-15, pages 62.

1. Soit proposée la fraction continue

$$\varphi = \frac{\nu}{\omega + \frac{\nu'}{\omega' + \frac{\nu''}{\omega'' + \frac{\nu'''}{\omega''' + \dots}}}}$$

Formons ces deux séries V, V', V'', V''', etc., W, W', W'', W'''; d'après ces relations

$V = 0,$	$W = 1,$
$V' = \nu,$	$W' = \omega W,$
$V'' = \omega' V' + \nu' V,$	$W'' = \omega' W' + \nu' W,$
$V''' = \omega'' V'' + \nu'' V',$	$W''' = \omega'' W'' + \nu'' W',$
$V^{iv} = \omega''' V''' + \nu''' V'',$	$W^{iv} = \omega''' W''' + \nu''' W'',$
.....

on aura

$$\frac{V}{W} = 0,$$

$$\frac{V'}{W'} = \frac{\nu}{\omega},$$

$$\frac{V''}{W''} = \frac{\nu}{\omega + \frac{\nu'}{\omega'}},$$

$$\frac{V'''}{W'''} = \frac{\nu}{\omega + \frac{\nu'}{\omega' + \frac{\nu''}{\omega''}}},$$

et ainsi de suite.

On en déduit

$$\begin{aligned}
VW' - V'W &= -v, \\
V'W'' - V''W' &= +v\omega', \\
V''W''' - V'''W'' &= -v\omega'\omega'', \\
V'''W^{iv} - V^{iv}W''' &= +v\omega'\omega''\omega''', \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Ainsi dans la série

$$\frac{v}{WW'} - \frac{v\omega'}{W'W''} + \frac{v\omega'\omega''}{W''W'''} - \frac{v\omega'\omega''\omega'''}{W'''W^{iv}} + \dots,$$

Le premier terme est $\frac{V'}{W}$;

La somme des deux premiers termes égale $\frac{V'}{W''}$;

La somme des trois premiers termes égale $\frac{V''}{W''}$;

La somme des quatre premiers termes égale $\frac{V^{iv}}{W^{iv}}$;

Et ainsi de suite.

Cette série, soit qu'elle se termine ou qu'elle se prolonge à l'infini, exprime la valeur de φ et aussi la différence de φ et des fractions approchées

$$\frac{V'}{W'}, \quad \frac{V''}{W''}, \quad \frac{V'''}{W'''}, \dots$$

Il est facile de voir qu'on a aussi les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\varphi W'' - V'' &= \omega' (\varphi W' - V') + v' (\varphi W - V), \\
\varphi W''' - V''' &= \omega'' (\varphi W'' - V'') + v'' (\varphi W' - V'), \\
\varphi W^{iv} - V^{iv} &= \omega''' (\varphi W''' - V''') + v''' (\varphi W'' - V''), \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Application.

Soit

$$\varphi = \frac{1}{2} \log \frac{1+u^{-1}}{1-u^{-1}} = u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \dots$$

Réduite en fraction continue, on a

$$\varphi = \frac{1}{u - \frac{1}{\frac{2}{3}}} \\ u - \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5} \\ u - \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 7} \\ u - \frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 9} \\ u - \frac{5 \cdot 5}{9 \cdot 11} \\ \dots$$

ainsi

$$\nu = 1, \quad \nu' = \frac{1}{3}, \quad \nu'' = -\frac{4}{15}, \quad \nu''' = \frac{9}{35}, \quad \nu^{iv} = -\frac{16}{63}, \dots,$$

$$\omega = \omega' = \omega'' = \omega''' = \omega^{iv} = \dots = u;$$

$$V = 0,$$

$$V' = 1,$$

$$V'' = u,$$

$$V''' = u^2 - \frac{4}{15},$$

$$V^{iv} = u^3 - \frac{11}{21} u,$$

$$V^{v'} = u^4 - \frac{7}{9} u^2 + \frac{64}{945},$$

$$V^v = u^5 - \frac{34}{33} u^3 + \frac{1}{5} u,$$

$$V^{v''} = u^6 - \frac{50}{39} u^4 + \frac{283}{715} u^2 - \frac{256}{15015},$$

.....

$$\begin{aligned}
W &= 1, \\
W' &= u, \\
W'' &= u^2 - \frac{1}{3}, \\
W''' &= u^3 - \frac{3}{5}u, \\
W^{iv} &= u^4 - \frac{6}{7}u^2 + \frac{3}{35}, \\
W^v &= u^5 - \frac{10}{9}u^3 + \frac{5}{21}u, \\
W^{vi} &= u^6 - \frac{15}{11}u^4 + \frac{5}{11}u^2 - \frac{5}{231}, \\
W^{vii} &= u^7 - \frac{21}{13}u^5 + \frac{105}{143}u^3 - \frac{35}{429}u, \\
&\dots \dots \dots
\end{aligned}$$

Il est facile de voir que les V et les W sont tous des fonctions entières de u; que V^(m) est de degré m — 1, et que les puissances m — 2, m — 4, m — 6 manquent; que W^(m) est de degré m, et les puissances m — 1, m — 3, m — 5, etc., manquent; et l'on a

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{1}{WW'} + \frac{1}{3W'W''} + \frac{2.2}{3.3.5W''W'''} + \frac{2.2.3.3}{3.3.5.5.7W''W'''} \\
&\quad + \frac{2.2.3.3.4.4}{3.3.5.5.7.7.9W^{iv}W^v} + \dots,
\end{aligned}$$

et aussi généralement

$$\begin{aligned}
\varphi - \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}} &= \frac{2.2.3.3 \dots m.m}{3.3.5.5 \dots (2m-1)(2m+1)W^{(m)}W^{(m+1)}} \\
&\quad + \frac{2.2.3.3 \dots (m+1)(m+1)}{3.3.5.5 \dots (2m+1)(2m+3)W^{(m+1)}W^{(m+2)}} \\
&\quad + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Si l'on développe $\frac{V^{(m)}}{W^{(m)}}$ en une série descendante, son

premier terme sera

$$\frac{2.2.3.3\dots m.m.u^{-(2m+1)}}{3.3.5.5\dots (2m-1)(2m+1)};$$

car le premier terme de $W^{(m)}$ est u^m et celui de $W^{(m+1)}$ est $u^{(m+1)}$.

Ainsi $\varphi W^{(m)}$ est égal à une fonction entière $V^{(m)}$, plus à une série infinie dont le premier terme est égal à

$$\frac{2.2.3.3\dots m.m.u^{-(m+1)}}{3.3.5.5\dots (2m-1)(2m+1)}.$$

Cette propriété de la fonction $W^{(m)}$ est importante dans la recherche des intégrales par approximation.