Bulletin de bibliographie, d’histoire et de biographie mathématiques. Notice sur la découverte des logarithmes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 1-204 (supplément)

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__S1_0>

BULLETIN

DE

BIBLIOGRAPHIE, D'HISTOIRE

ET DE

BIOGRAPHIE MATHÉMATIQUES.

NOTICE SUR LA DÉCOUVERTE DES LOGARITHMES.

« Le temps est l'étoffe dont la vie est faite, dit Franklin; ménager cette étoffe, c'est prolonger la vie. » L'introduction de l'arithmétique chiffrée, de l'algorithme algébrique, les inventions des logarithmes et du calcul infinitésimal, comme les chemins de fer et les télégraphes électriques, font parcourir à la pensée de grands espaces en peu d'instants. Avant le siècle de Néper, ceux qui faisaient de l'arithmétique leur étude favorite trouvaient un passe-temps agréable à comparer les progressions géométriques et arithmétiques, et fournissaient ainsi l'occasion à ceux qui aiment mieux décrier les mathématiques que les étudier, comme dit Lambert, l'occasion de ranger ces comparaisons parmi les oiseuses et inutiles spéculations; et c'est pourtant ces oiseuses spéculations qui ont amené une de ces inventions qui font époque dans les annales de l'esprit humain. Cette invention a été proclamée la première fois dans l'ouvrage suivant, d'une extrême rareté (*) :

(*) M. Biot, en écrivant l'article dont nous parlerons plus loin, n'a trouvé qu'un exemplaire dans la bibliothèque de feu Walkenaer, membre

Mirifici logarithmorum Canonis descriptio, ejusque usus, in utraque Trigonometria, ut etiam in omni logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio; authore et inventore JOANNE NEPERO, barone MERCHISTANII, etc., Scoto. Edduburgi, ex officina Andreæ Hart, bibliopolæ. CIↃ DC XIV; in-4; 19 feuilles et demie; texte, 8 feuilles et 1 page; Tables, 11 feuilles et 2 pages; 56 pages de texte et 90 pages de Tables.

L'ouvrage est dédié à Charles, prince de Galles, fils unique de Jacques Ier. La dédicace débute ainsi :

Quum nullum sit studium, vel doctrinæ genus (illustrissime princeps) quod generosa ac heroica ingenia, ad præclara quæque et sublimia magis acuat, contraque tarda et impulsa pectora magis obtundat, quam mathesis : non mirandum est eruditos et magnanimos principes eam magnopere præteritis omnibus seculis in deliciis habuisse, imperitos vero et ignavos homines eandem velut ignorantiæ suæ et ignaviæ hostem, semper odio acerrimo prosequutos esse.

Voici le sens :

« Illustre prince, comme il n'existe aucune étude, aucune espèce d'enseignement qui aiguise tout à la fois les esprits généreux et élevés, et rebute, par contre, les âmes inertes, frivoles, tant que les mathématiques, ne soyons donc pas surpris si, dans tous les siècles passés, des princes instruits, magnanimes, ont pris plaisir à cette science, tandis que des hommes apathiques, ignorants, ont toujours poursuivi cette science d'une haine violente, la traitant comme une ennemie de leur ignorance et de leur apathie. »

---

de l'Institut; cet exemplaire, que nous avons sous les yeux, fait maintenant partie de la précieuse collection mathematique de M. Chasles. Comme à l'ordinaire, l'ouvrage, étant rare et de science, ne se trouve plus à la Bibliothèque imperiale, où il est inscrit au catalogue, 4°, V, 1005.

Il termine par prier le prince d'accepter cet opuscule avec bienveillance : *Quod si fecisse intellexero, vel hac sola ratione animos mihi jam morbis pene confecto addideris, ad alia propediem, his fortasse majora et tanto principe magis digna moliendum.*

Ensuite on lit des vœux ardents pour la conservation du prince, vœux qui n'ont pas été exaucés : Charles I^er^ a péri sur l'échafaud.

Dans la préface d'une seule page qu'il adresse *charissimis mathematicæ cultoribus*, il dit que rien n'est si fatigant dans la pratique que les multiplications, les divisions, les extractions de racines carrées et cubiques : *quæ præter prolixitatis tædium, lubricis etiam erroribus plurimum sunt obnoxiæ.* Il veut remplacer ces opérations par des additions, des soustractions, des bissections et des trisections.

Selon l'usage d'alors, la préface est suivie de cinq éloges en vers. L'un est d'André Junius, professeur de philosophie de l'Académie d'Édimbourg.

L'ouvrage est divisé en deux livres, dont le premier contient cinq chapitres. Le chapitre I contient les définitions, dont voici les trois principales; nous les expliquerons plus bas :

1^re^ DÉFINITION. *Linea æqualiter dicitur, quum punctus eam describens æqualibus momentis per æqualia intervalla progreditur.*

2^e^ DÉFINITION. *Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctum eam transcurrens æqualibus momentis, segmenta abscindit ejusdem continuo rationis ad lineas a quibus abscinduntur.*

6^e^ DÉFINITION. *Logarithmus ergo cujusque sinus est numerus quam proxime definiens lineam, quæ æqualiter crevit inter eas dum sinus totius linea proportionaliter in sinum illum decrevit, existente utroque motu synchrono atque initio æquiveloce.*

Il déduit comme corollaire que le logarithme du sinus total 10000000 est nul et que les logarithmes des nombres plus grands que le sinus total sont négatifs, *nihilo minores;* il les nomme *logarithmes défectifs* et les désigne par —, tandis qu'il nomme *abondants* et désigne par + les logarithmes des nombres moindres que le sinus total.

Le chapitre II donne les propriétés des logarithmes : les nombres croissant en progression géométrique, les logarithmes croissent en progression arithmétique, etc. Dans un avertisssement final, il dit que ce serait maintenant à expliquer le moyen de calculer les logarithmes, mais qu'il réserve cela pour un temps plus opportun. *Præstolor enim eruditorum de his judicium et censuram, priusquam cætera in lucem temere prolata lividorum detrectationi exponantur.*

Le chapitre III comprend la description des Tables; chaque page est divisée en sept colonnes; la première est celle des arcs croissant de minute en minute depuis zéro jusqu'à 45 degrés; la septième colonne est celle des arcs décroissant de minute en minute de 89° 60′ jusqu'à 45 degrés ; la seconde colonne est celle des sinus des arcs de la première colonne; la sixième contient les sinus des arcs de la septième; la troisième contient les logarithmes des sinus des arcs qui sont à gauche, et la cinquième les logarithmes des sinus des arcs qui sont à droite: ce sont les logarithmes des cosinus; mais il ne se sert pas de cette dénomination, il les nomme *antilogarithmes* étant vis-à-vis des logarithmes des sinus. La quatrième colonne enfin, colonne du milieu, contient les différences entre les logarithmes de la troisième colonne et de la cinquième colonne; cette colonne quatrième porte en tête les deux signes + et —; les différences sont *abondantes* en retranchant les nombres de la cinquième colonne de la troisième, et *défectives* en retranchant les nombres de la troisième colonne de la cinquième : ce sont les logarithmes des tangentes et cotangentes ; il ne fait pas usage de ce dernier mot.

Le chapitre IV est intitulé : *De usu Tabulæ et numerorum ejus.* Il indique aussi le moyen de trouver les logarithmes des nombres qui ne sont pas dans la Table et les nombres correspondants aux logarithmes non consignés dans les Tables. Dans l'avertissement final, il annonce qu'il donnera plus tard les deux progressions pour calculer les logarithmes. *Quare de his (Deo aspirante) ubi de logarithmis condendis et creandis agetur, amplius aliquando disseremus.*

Cap. V. *De amplissimo logarithmorum usu et expedita per eos praxi.* Il donne plusieurs exemples ; tous reviennent à insérer un certain nombre de moyennes proportionnelles géométriques entre deux nombres donnés.

Le livre second, divisé en six chapitres, est un Traité des deux trigonométries, avec des applications logarithmiques ; il est intitulé : *De canonis mirifici logarithmorum præclaro usu in trigonometria.*

Les deux premiers chapitres contiennent la résolution des triangles rectilignes, rectangles et obliquangles, avec des applications numériques.

Lorsque la hauteur du triangle est intérieure, il nomme *base vraie* la somme de deux segments, et *base alterne* leur différence ; et lorsque la hauteur est extérieure, la base vraie est la différence des segments, et la base alterne leur somme. Il conserve aussi en trigonométrie sphérique ces dénominations qui abrégent les énoncés de certains théorèmes.

Conclusio. *Sequantur jam sphærica triangula, omnium difficillima, ut vulgo ab aliis traduntur, per logarithmos tamen nostros omnium facillima.*

Le chapitre III, d'une seule page (p. 29), ne contient que des définitions : un triangle quadrantal (*quadrantale*) est celui où il entre un angle ou un côté de 90 degrés.

Le chapitre IV est consacré aux triangles quadrantaux; les exemples se rapportent à des questions sur la position du Soleil dans l'écliptique, et les énoncés sont toujours *logarithmiques*. On discute les cas douteux.

CAP. V. *De non quadrantalibus mixtis.*

Ce sont des triangles dont aucun côté, aucun angle n'est de 90 degrés, et où les données renferment à la fois des côtés et des angles ; il divise de tels triangles en triangles *quadrantaux*, par des perpendiculaires abaissées des sommets sur les côtés opposés.

CAP. VI. *De non quadrantalibus puris.*

C'est lorsqu'il entre dans les données seulement des côtés ou seulement des angles. Il dit que ce chapitre aurait dû précéder le chapitre V; mais à cause de ses difficultés il l'a réservé pour le dernier. On trouve ici ses trois analogies énoncées d'une manière assez compliquée et une démonstration géométrique de l'analogie des tangentes. *Verum quia hujus analogiæ tangentium fundamentalis, hactenus ignotæ, demonstrationem a me forte requirent lectores, eam ideo, quantum hujus compendii brevitas patitur, hic explicabimus.*

Il indique trois méthodes pour déduire les angles, connaissant les côtés : la première est la formule

$$\sin^2 \frac{1}{2} A \sin b \sin c = \sin(p - b) \sin(p - c);$$

la seconde est la formule

$$\cos^2 \frac{1}{2} A \sin b \sin c = \sin p \sin(p - a);$$

la troisième est la formule

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} A \sin p \sin(p - a) = \sin(p - c) \sin(p - b):$$

c'est ce qu'il nomme l'analogie des tangentes. La démonstration faite sur la sphère repose sur un procédé de perspective (*umbræ*). La dernière phrase de l'ouvrage est : *Interim hoc brevi opusculo fruamini, Deoque opifici summo, omniumque bonorum opitulatori laudem summam et gloriam tribuite.*

(*La suite prochainement.*)

BIBLIOGRAPHIE.

Théorie générale des Approximations numériques, suivie d'une Application a la résolution des équations numériques; par M. *J. Vieille*, agrégé près la Faculté des Sciences de Paris, maître de conférences à l'École Normale, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée impérial Louis-le-Grand. 2e édition, corrigée et augmentée. Paris, 1854; XII-200 p.; in-8 (*).

L'édition de 1852 n'a que 100 pages (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 457); l'augmentation de l'édition actuelle ne consiste pas seulement en pages, mais en substance, en nouveaux matériaux, en amélioration d'anciens matériaux. Conservant la bonne opinion que nous avons émise sur la première édition, nous allons ajouter quelques observations, en parcourant cette seconde édition. On lit (p. 14) le calcul du logarithme népérien de 2 avec sept décimales exactes. Pourquoi, à cette occasion, n'avoir pas mentionné la méthode Koralek qui permet de calculer de tels logarithmes avec une promptitude inouïe et avec autant de décimales qu'on veut? C'est une omission fâcheuse. Le calcul de π (p. 22) est

---

(*) Prix : 3f 50c, chez *Mallet-Bachelier*, libraire arriéré de beaucoup, depuis le travail si remarquable de M. Lehmann (*Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 419).

On dit qu'en prenant $\pi = 3,14159265358$, on ne se tromperait pas de *deux* unités du dernier ordre; on ne se trompe pas d'une demi-unité de cet ordre. Parlant du module M, on lit (p. 51) qu'en faisant $M = 0,434294481 91$, *on ne sait si cette valeur* est approchée par défaut ou par excès; comme les chiffres qui suivent 9 sont 032, il est évident que l'approximation est par excès (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 368).

Dans les utiles applications que donne l'auteur, on regrette de ne pas trouver celles-ci, d'une haute importance: Avec combien de décimales exactes faut-il calculer $\cos a$ pour que l'on ait avec m décimales exactes les valeurs de $\frac{1}{\cos a}$ et $\frac{\sin a}{\cos a}$? questions qui ont été si bien traitées par Prony dans ses *Éclaircissements sur un point de l'historique des Tables trigonométriques* (*Mém. de l'Inst.*, t. V, p. 671; an XII). Ce point historique est fort curieux.

P. Joachim (Georges), surnommé Rheticus, né en 1514 à Feldkirch, dans les Grisons (Rhetia), était, en 1537, professeur de Mathématiques à Wittemberg (Saxe). Ayant entendu parler du système de Copernic, il se rendit auprès de l'illustre chanoine, en 1539, à Wiarm, resta avec lui, et devint son ami et son *calculateur*. Copernic était découragé faute de livres sur la trigonométrie; aidé de Rheticus, il composa une Trigonométrie que Rheticus publia en 1542 (*). Copernic se remit ensuite à son immortel

(*) *De lateribus et angul. triangul. tum planor. rectilineor. tum sphæricor. libellus eruditissimus et utiliss. cum ad plerasque Ptolomæi demonstrationes intelligendas tum vero ad alia multa.* Scriptus a clariss. et doctiss. viro D. NICOLAO COPERNICO TORUNIENSI. Additus est canon semissium subtensarum rectarum linearum in circulo. Vitteb., 1542; in-4.

La partie ajoutée est probablement de Rheticus.

ouvrage *De revolutionibus orbium cœlestium*, dont on doit aussi la publication à Rheticus, qui revint en 1541 à Wittemberg.

Partisan enthousiaste du système de Copernic, il résolut de construire des Tables pour en faciliter l'usage. Il se mit au travail en 1540 et fit paraître en 1551, à Nuremberg : *Georgii Joachimi Rhetici medici et mathematici canon doctrina triangulorum*. Une seconde édition parut à Bâle en 1580, mais son grand travail ne fut publié et achevé qu'après sa mort (1576).

Opus palatinum de triangulis, a Georgio Joachimo Rhetico cœptum; L. Valentinus Otho, principis Palatini Friederici IV electoris mathematicus, consummavit. Ann. Sal. Hum. 1596 ; in-fol ; titre, dédicace, préface, 10 pages ; texte, 341 pages. A la fin on lit : *Neostadii in Palatinatu excudebat Matthœus Harniscus, anno salutis* 1596, *Meteoroscopium*.... 21 pages.

Ce Valentin Othon, étant à Wittemberg, cultivant l'astronomie, désira aussi une connaissance approfondie de la trigonométrie ; à cet effet, il se rendit auprès de Rheticus, alors en Hongrie, et en fut très-bien accueilli. Il lui dit : « Tu viens auprès de moi au même âge où je suis » venu auprès de Copernic. Sans moi son ouvrage n'au- » rait pas vu le jour. *Nisi ego illum adiissem opus, ipsius* » *omnino lucem non vidisset.* Moi aussi j'ai interrompu » mon travail et n'ai pas encore touché aux triangles obli- » quangles, car je n'ai achevé que ma troisième Table ; » pour le moment je ne puis m'y mettre ; mais, puisque je » t'aurai pour compagnon et associé, je le reprendrai » plus tard. En attendant, tu suivras mes leçons. »

Il expliquait alors le XIII^e et le XIV^e chapitre d'Albategnius, et, le cours terminé, il envoya Othon à Cracovie pour y chercher la première et la deuxième série de ses Tables, qu'il avait laissées dans cette ville. Dans cet intervalle, Rheticus invité chez un certain baron, ayant couché dans une chambre nouvellement peinte, gagna une fluxion de poitrine, dont il souffrit lors du retour d'Othon. Ils furent à peine trois jours ensemble, que Rheticus reçut une autre invitation auprès du comte Jean Ruber, *Summæ rei præfecto in Ungaria*. La maladie s'aggrava à Cassau, et, se préparant à mourir, il fit prier le comte, par des amis, de remettre son ouvrage à Othon. Ruber y consentit; quatre jours après, Rheticus expira dans les bras d'Othon, à 2 heures du matin, en 1576, dans sa 61e année (*). Ruber manda sa mort à l'empereur Maximilien II, qui approuva non-seulement la volonté de Rheticus, mais fit dire à Othon qu'il se chargerait des frais de l'impression. Othon se mit tout de suite à travailler à la troisième série. L'empereur étant mort, l'impression ne put avoir lieu. Après diverses vicissitudes, Othon se rendit dans le Palatinat et y trouva moyen de subvenir aux frais. Delambre donne une description incomplète de l'ouvrage(*Astron. moderne*); c'est Kästner qui en donne une idée complète (*Geschichte der Mathematik*, t. I, p. 590), et aussi J. Bernoulli (*Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1786).

Il suffit de savoir que Rheticus adopte pour rayon l'unité suivie de quinze zéros, et en calcule les sinus avec quinze décimales, de 10 secondes en 10 secondes du quadrant, pour être publié avec 10 décimales; de même les tangentes et les sécantes avec 10 décimales. Au lieu des dénominations, sinus, cosinus, sécante, il emploie les dénominations, *perpendicule*, *base*, *hypoténuse*. Les tri-

---

(*) La fréquentation des grands n'est pas favorable à la longévité des savants. Kepler mourut par suite d'un voyage avec l'empereur Sigismond. Le séjour de Stockholm, auprès d'une folle couronnée, abrégea la vie de Descartes. Les *petits soupers* ruinèrent la santé de d'Alembert et menèrent de bonne heure Clairaut au tombeau.

angles sphériques obliquangles sont le travail d'Othon, qui était de Naples (*Parthenopolitanus*) et doit être né vers 1530.

Une partie de l'ouvrage porte pour titre : *L. Valen. Oth. Parthenopol. Meteoroscopium numerorum primam monstrans proportionem singul. parall. ad æquatorem vel meridianum. Meteoroscopium* signifie ici mesure des hauteurs célestes ; c'est une Table pour calculer les quantités $\cos\beta \sin\delta$, $\cos\beta \cos\delta$. β est la distance d'un parallèle à l'équateur et δ un arc quelconque pris sur ce parallèle depuis $\delta = 1^\circ$ jusqu'à $\delta = 89^\circ$, et β aussi de 1 à 89 degrés.

L'ouvrage devait porter le titre *Opus saxonum;* des circonstances ultérieures ont fait changer le titre. Une seconde édition de ce célèbre ouvrage parut sous un autre titre également célèbre :

Thesaurus mathematicus, sive Canon sinuum ad radium 1 00000 00000 00000 *et ad dena quæque scrupula secunda quadrantis una cum sinubus primi et postremi gradus, ad eundem radium. Adjunctis ubique differentiis primis et secundis, atque ubi res tulit etiam tertiis. Jam olim quidem incredibile labori et sumtu a Georgio Joachimo Rhetico supputatus; at nunc primum in lucem editus et cum viris doctis communicatus a Bartholomæo Pitisco Grunbergensi Silesio, cujus etiam accesserunt : I. Principia sinuum ad radium*

1 00000 00000 00000 00000 00000

quam accuratissime supputata; II. *Sinus decimorum, tridecimorum et quinquagesimorum quorumque scrupulorum secundorum per prima et postrema* 35 *scrupula prima ad radium* 1 00000 00000 00000 00. *Francofurti excudebat Nicolaus Hofmannus sumtibus Jonæ Rosæ, anno* CIↃ IↃ XIII.

Pitiscus, né à Schlaun, près Grunberg, en 1561, théologien et géomètre, avait été chargé par l'électeur palatin Frédéric IV d'améliorer les Tables de Rheticus, ce qui n'était pas possible en prenant pour rayon 10^{10}, tel qu'il est dans l'*Opus palatinum.* Il conjectura que Rheticus devait avoir calculé avec 15 décimales. S'en étant informé auprès d'Othon, ce dernier en convint, mais ne sachant plus, par affaiblissement de sa mémoire, ce que les papiers étaient devenus, il croyait les avoir laissés à Wittemberg. Othon, à sa mort, légua ses papiers à Jacob Christmann (*) qui y trouva inopinément les calculs de Rheticus. Lorsque Pitiscus apprit cela, il examina ces précieuses reliques, *utrinque situ et squalore obsitas et pæne fœtentes.* Il dit que pour les lignes trigonométriques des tangentes et sécantes des arcs de commencement et de la fin du quadrant, Othon avait commis de grandes erreurs, parce qu'il avait calculé le sinus avec 10 décimales, tandis qu'il en faut 22; c'est à cet effet qu'il calcula la Table qui est à la fin du *Thesaurus,* au moyen de laquelle il recalcula les cotangentes et cosécantes des arcs depuis le commencement du quadrant jusqu'à la fin du sixième degré, de 10 secondes en 10 secondes; il fit imprimer 86 pages de l'*Opus palatinum* pour en faire un carton et remplacer les 86 pages fautives. Voici le titre de cette réimpression :

Georgii Joachimi Rhetici magnus Canon doctrinæ triangulorum ad decades secundorum scrupulorum et ad partes 1 00000 00000 *recens emendatus a Bartholomæo Pitisco Silesio. Addita est brevis commonefactio de fabrica et usu hujus canonis, etiam separatim ab Opere palatino venditur in bibliopola Harnischiano.*

Il paraît que peu de personnes se sont procuré ce car-

(*) Savant orientaliste et géomètre, né au Johannisberg (Nassau-Biberich) N. 1554, M. 1613.

ton. C'est à Prony qu'on en doit la connaissance; il ne parle que de deux exemplaires existants à Paris: le sien et celui de la bibliothèque du Conseil d'État; je ne sais pas ce qu'est devenu l'exemplaire de Prony. L'illustre analyste compare les Tables de l'*Opus palatinum*, du *Thesaurus*, avec les grandes Tables du Cadastre, et il fait voir que pour avoir les sécantes d'un arc de $89^\circ 59' 47''$ à $89^\circ 59' 56''$ avec 10 décimales exactes, il faut calculer les cosinus avec 20 décimales exactes, et d'autres résultats analogues qui prenaient naturellement place dans l'ouvrage de M. Vieille. Il me semble que faire connaître aux élèves les gloires de la France fait partie du professorat: ce n'est pas un devoir rigoureux, j'en conviens; toutefois il est bon de le remplir. On ne cite pas davantage les travaux de MM. Guilmin, Lionnet, etc., sur les approximations de diverses espèces et qui ne diffèrent pas essentiellement de celles de l'auteur. Il paraît que M. Vieille n'a pas pris connaissance de ce que dit M. Piobert sur la meilleure forme à donner aux triangles dans les levés (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 234): il aurait présenté autrement ce qu'il dit à ce sujet (p. 123). Le calcul approché des racines des équations numériques est traité avec beaucoup de soin; les applications aux équations transcendantes sont nombreuses, bien choisies dans Euler; la méthode est la même que celle de M. Stern dans son Mémoire couronné. On ne dit rien ni des racines imaginaires, ni des équations à plusieurs inconnues (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 365).

L'ouvrage a le mérite de réunir sous un petit volume des théories et des pratiques précieuses, exposées avec lucidité, rigueur et méthode, et ramenées à un petit nombre de principes généraux. Mais on dirait que l'auteur, selon l'expression de Bacon, a tout tiré, *araneæ instar,* de lui-même: c'est le *mal français*, comme dit La Fontaine. Cette *Théorie générale* dispense d'une multiplicité de livres qui entraîne perte de temps et d'argent; écoutons le conseil de Sénèque : « *Onerat discentem turba, non instruit, multoque satius paucis te auctoribus tradere quam errare per multos* (*De tranquillitate animi*, § 9). L'ouvrage suivant, dont je ne connais que le titre, a de l'analogie avec celui de M. Vieille :

Mundt. Carl. Æm. De accuratione, qua possit quantitas per Tabulas determinari et quidem cum per Tabulas universum, tum singulatim per Tabulas logarithmicas et trigonometricas. Grand in-4, Hauniæ, 1842, Leipzig.

GRANDES TABLES LOGARITHMIQUES DE L'OBSERVATOIRE (*).

Lors de l'établissement du système métrique français, l'idée devait naturellement se présenter de reprendre en sous-œuvre le travail de Briggs sur les divisions centésimales du quadrant. D'après la tendance de l'époque (an II), on résolut de construire des Tables sur une échelle qui dépassât tout ce qui existait. Prony fut chargé de l'entreprise, puissamment protégée par Carnot, Prieur (de la Côte-d'Or), Brunet (de Montpellier), membres de la Convention. Voulant faire usage du principe de Smith sur la division du travail, Prony s'y prit de cette manière. Une grande série de nombres quelconques étant donnée, en formant successivement les différences premières, secondes, troisièmes, etc., si l'on parvient à des différences

(*) *Voir* Notice sur les grandes Tables logarithmiques et trigonométriques calculées au Bureau du Cadastre sous la direction du citoyen Prony (*Mémoires de l'Institut*, t. V, p. 49, an XII). La Notice a été lue le 1er germinal an IX.

constantes, ou à peu près constantes, on peut, au moyen de cette différence constante et des premiers termes des séries précédentes, trouver tous les termes de la première série, rien que par des additions et des soustractions. Quand il s'agit des logarithmes des nombres, des lignes trigonométriques et de leurs logarithmes, l'analyse donne des formules pour calculer les différences constantes et les premiers termes des différences. On peut consulter à cet effet les Notes de Legendre sur la trigonométrie et les leçons d'analyse de Prony. Les travailleurs furent distribués en trois sections.

1. La section des théoriciens, formée de cinq ou six mathématiciens éminents, parmi lesquels figure Legendre, dirigeait et surveillait toutes les opérations théoriques.

2. La section des calculateurs, au nombre de sept ou huit, composée d'hommes familiarisés avec les calculs numériques et analytiques, calculait les termes des séries par les différences. Leurs travaux étaient doubles, c'est-à-dire, on devait parvenir aux mêmes résultats par des formules *différentes;* moyen de contrôle.

3. Enfin, une troisième section de soixante à quatre-vingts personnes qui ne s'occupaient que d'additions et de soustractions; les neuf-dixièmes ne savaient que les quatre règles et les travaux étaient aussi doubles, mais les mêmes; les travailleurs ne communiquant pas ensemble devaient parvenir aux mêmes résultats (*). On a remarqué que ce n'étaient pas les plus instruits d'entre eux qui commettaient le moins d'erreurs.

Tous ces calculs forment dix-sept volumes in-folio, déposés et conservés à l'Observatoire impérial.

(*) Prony a enrôle beaucoup d'anciens coiffeurs que la suppression des perruques et des cheveux poudrés avait laisses sans occupation.

Voici le contenu :

1°. Introduction; contenant la théorie de toutes les opérations et l'usage des Tables.

2°. Sinus naturels pour chaque seconde décimale, avec 25 décimales et sept à huit colonnes de différences, pour être publiés avec 22 décimales et cinq colonnes de différences.

3°. Logarithmes des sinus pour chaque tierce décimale; 14 décimales, 5 colonnes de différences.

4°. Logarithmes de $\frac{\sin a}{a}$ pour les cinquante premières tierces décimales; 14 décimales et cinq colonnes de différences.

5°. Logarithmes des tangentes correspondants aux logarithmes sinus.

6°. Logarithmes $\frac{\operatorname{tang} a}{a}$, comme au § 4; à être publiés avec 12 décimales et trois colonnes de différences.

7°. Logarithmes des nombres 1 à 10^4 avec 19 décimales.

8°. Logarithmes des nombres 10^4 à 2.10^5; 14 décimales et cinq colonnes de différences; à être publiés avec 12 décimales et trois colonnes de différences.

Un marché était conclu avec Firmin Didot pour la publication stéréotype en 1200 pages in-folio, non compris l'introduction. Cent planches furent tirées. La chute du papier-monnaie et le désordre des finances interrompirent l'opération, qui ne fut jamais reprise (*).

Le gouvernement actuel, qui a exécuté avec bonheur de si vastes travaux, ajouterait à son illustration en élevant deux monuments de gloire impérissable.

1°. L'achèvement de l'œuvre conventionnelle. Lorsque

(*) Il y a eu des négociations à ce sujet avec le gouvernement anglais qui n'aboutirent pas.

toutes les observations atteignent une si extrême précision, la publication complète des Tables de l'Observatoire serait sans conteste désirable en beaucoup d'occasions. D'ailleurs, c'est surtout dans les sciences que se vérifie cet apophtegme de Voltaire : *Le superflu, chose si nécessaire.*

2°. L'imitation d'une œuvre de Louis XIV : la construction aux environs de la capitale d'un observatoire digne de la nation, observatoire simultanément astronomique, météorologique, compris le magnétisme. Sobre dans les constructions, n'épargnant rien pour l'établissement et l'acquisition des instruments, laissant toute latitude à l'activité, au zèle intelligent du célèbre *directeur* qui ajouterait ainsi une nouvelle auréole à sa réputation (*) ; et en outre, bien entendu, un personnel suffisant, confortablement logé, honorablement rémunéré, et avec la science de nos astronomes, le talent de nos artistes, le bon goût de nos architectes, il est permis d'espérer non-seulement d'atteindre le modèle Pulkova, mais de le surpasser. L'édilité parisienne ne refusera pas de contribuer à cette dépense, infiniment moindre que celle qu'entraîne la création d'une rivière stagnante au bois de Boulogne.

La démolition d'une macédoine de murailles, épaisses, de laide apparence, la vente du terrain, couvriraient une partie notable de la dépense et embelliraient une des entrées principales de la capitale.

A ce propos, nous nous rappelons les réflexions d'un auteur anglais, nommé Thomas Smith ; il propose comme très-désirable l'édition d'un collection des anciens mathématiciens, *veterum mathematicorum corpus*, et il

(*) « Quelle limite dois-je mettre dans la dépense ? demanda M. Struve à l'empereur Nicolas. — Achetez tout ce qu'il y a de plus parfait en instruments, il n'y a pas d'autre limite. » Réponse digne d'un grand souverain, digne de l'illustre astronome de Pulkova.

ajoute qu'un tel projet ne peut se réaliser : *At si quando auspicatiora illuxerint tempora, reges principesque, qui immensas in ædibus construendis et illarum apparatu opes, ne dicam in luxu et voluptatibus parum se dignes nocivisque, et quæ cito effluunt, longe gloriosius, et non, nisi pereunte mundo, periturum monumentum, inde auspiciis suis et munificentia regali, hominum doctorum industria ad id præstandum allecta et provocata, sibi condendum et erigendum curarent.* (*Admodum reverendo et doctissimo Roberto Huntington, etc.*; scriptore THOMA SMITH. Londini; 1704.)

On publie la collection des médecins grecs; pourquoi pas celle des arithméticiens, géomètres, mécaniciens, musiciens grecs?

BIBLIOGRAPHIE.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, suivie de la DISCUSSION DES COURBES D'UN DEGRÉ SUPÉRIEUR AU SECOND; par *C. Jacob*, ancien élève de l'École Polytechnique, capitaine d'artillerie. Deuxième tirage (*).

Le premier tirage est de 1843; ce second tirage répandra un ouvrage dont il a été rendu un compte avantageux par M. Gerono, professeur si compétent [*Nouvelles Annales*, t. II, p. 192 (**)]; publié avant les *nouveaux Programmes*, il y a là une contexture scientifique qui, bien loin de nuire, met les élèves en état de résoudre facilement les questions des examens actuels. L'auteur est mort le 30 juillet 1848.

(*) Prix : 5 francs, chez Mallet-Bachelier.

(**) C'est par erreur qu'on a mis mon nom au bas d'un extrait mis en tête de ce second tirage.

Système de notations des diverses unités employées dans les sciences appliquées; par M. *Didion*, capitaine d'artillerie (*). Metz, in-8, 11 pages. (*Extrait des Mémoires de l'Académie royale de Metz*, 1836-37.)

Voici les notations commodes proposées par l'auteur et dont plusieurs sont ou méritent d'être adoptées.

SYSTÈME MÉTRIQUE DÉCIMAL.

Unités simples.

Mètre.... *m*							
Litre.... *l*	Unités multiples.....	Myria	Kilo	Déca			
Gramme. *g*		M	K	D			
Are...... *a*	Unités sous-multiples.	Déci	Centi	Milli	Décimilli	Centimilli	
Stère.... *s*		*d*	*c*	*m*	*dmm*	*cmm*	
Franc.... *f*							

L'auteur remarque que cette notation est celle de M. Vincent dans sa Géométrie.

Ainsi

15^{Mm}	signifie	15 myriamètres.
45^{mm}	»	45 millimètres.
$17^{\mathrm{Ha}},1525$	»	17 hectares 15 ares 25 centiares.

Unités composées.

m^2	signifie	mètre carré.
m^3	»	mètre cube.
mm^2	»	millimètre carré.
cm^2	»	centimètre carré.

(*) Aujourd'hui colonel.

MÉCANIQUE.

1^{Km}	signifie	1 kilogramme elevé à 1 mètre de hauteur.
$15^{M:h}$	»	vitesse de 15 mètres par heure.
$5\frac{1}{2}^{L:h}$	»	vitesse de $5\frac{1}{2}$ lieues à l'heure.
$5^{m:''}$	»	5 mètres parcourus en une seconde.
$3^{m^3:}$	»	écoulement de 3 mètres cubes d'eau par seconde.
1^{ko}	»	1 kilogramme d'eau élevé à la température de 1 degré.
$254^{Ko}, 5$	»	calorique nécessaire pour élever $25^{k},45$ d'eau à 10 degrés.
$75^{km \cdot s}$	»	75 kilogrammes élevés a 1 mètre par seconde = cheval-vapeur.

Nous croyons utile de donner ici les rapports entre les mesures françaises et les mesures anglaises, plus développés qu'on ne les trouve dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

			Log	Colog
Toise en mètres	=	1 94903 659	0 28981 99924	9 71018 00076
Toise en yards ..	=	2 13153 084	0 32869 16209	9 67130 83791
Toise en pieds anglais ..	=	6 39459 252	0 80581 28756	9 19418 71244
Pied en pieds anglais	=	1 06576 542	0 02767 16253	9 97232 83747
Metre en yards	=	1 09363 3067	0 03887 16284	9 96112 83716
Mètre en pieds anglais	=	3 28089 9167	0 51599 28831	9 48400 71169
Metre en pouces anglais.	=	39 37079	1 59517 41291	8 40482 58709
Myriametre en milles .	=	6 21382 424	0 79335 89605	9 20664 10395
Hectare en acres	=	2 47114 3	0 39289 79	9 60710 21
Gramme en grains anglais	=	15 44242	1 18871 4926	8 81128 5074
Gramme en livres troys	=	0 00268 0976	7 42829 2443	2 57170 7557
Gr. en livres avoir-du-poids.	=	0 00220 6060	7 34361 6886	2 65638 3144
Kilogramme en cwt.	=	0 01969 6964	8 29439 8864	1 70560 1136
Litre en gallons .	=	0 22009 687	9 34261 3866	0 65738 6134
Litre en pouces cubes anglais.	=	61 02705 1	1 78552 28873	8 21447 71127

(*Extrait des Tables de Shortfrede.*)

NOUVELLES TABLES ASTRONOMIQUES ET HYDROGRAPHIQUES, contenant un Traité abrégé des cercles de la sphère, la description des instruments à réflexion, diverses méthodes pour obtenir les latitudes et les longitudes terrestres, une nouvelle Table des logarithmes, des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes, de seconde en seconde, pour les quatre-vingt-dix degrés du quart du cercle; par *V. Bagay,* professeur d'hydrographie (*); édition stéréotypée, gravée, fondue et imprimée par MM. Firmin Didot père et fils. Avertissement et application, LXXXIV pages; Tables des logarithmes, 615 pages; trente-trois Tables diverses de navigation, 125 pages. Paris, in-4°; 1829 (**).

Voici un enfant du peuple qui, sans aucun secours, en argent, en livres, en hommes, a fait un ouvrage utile, le premier de ce genre, a vécu dans la misère, est mort aveugle et *illuminé*. Nouveau document à l'appui de cette pensée de Juvénal. *Probitas laudatur et alget*. Honneur à sa mémoire; c'est bien le moins qu'on puisse lui accorder.

Bagay (Valentin) est né le 9 avril 1772 dans la commune de Bisses-la-Maconnaise, canton de Lugny (Saône-et-Loire). En 1794, étant entré dans l'artillerie de la marine (4e régiment), il a traversé quatre fois l'Atlantique, et a assisté à plusieurs combats de mer; parvenu au grade de fourrier, il enseigna pendant six années les mathématiques au régiment et prit son congé en 1806, à Lorient, où il s'est marié, et donna des leçons aux aspirants de marine et aux capitaines de long cours. Ses relations avec les officiers de marine lui apprirent qu'on désirait beau-

(*) Professeur non officiel.
(**) Prix : 25 francs, chez Mallet-Bachelier.

coup d'avoir des Tables trigonométriques calculées de *seconde en seconde;* le 1[er] mai 1820 il entreprit ce travail qui fut présenté, le 24 mars 1824, à l'Académie sous le ministère de Clermont-Tonnerre. Le Rapport ne fut point très-favorable. On reproche à l'auteur de n'avoir interpolé qu'avec 7 décimales les petites Tables de Callet, ce qui occasionne des erreurs sur les 7[ièmes] décimales; erreurs qu'il a corrigées à la fin de son ouvrage; il en reste 74 qu'il annonce devoir publier. Les officiers de la marine royale firent des démarches auprès du gouvernement, et fin de 1825 une souscription fut accordée sous le ministère de Chabrol. Alors, en 1826, Bagay se rendit à Paris, et, porteur d'une liste de 240 officiers de marine souscripteurs, il traita avec Didot père et fils pour le stéréotypage de son ouvrage, avec la clause de ne recevoir aucune rémunération qu'après la rentrée de tous les frais, qui se montèrent à 25000 francs. En 1841, il n'y avait encore que 12000 francs de rentrés, et Bagay atteignait sa soixante-neuvième année sans avoir rien reçu. Le gouvernement anglais lui avait accordé 1000 francs pour soixante-dix-neuf erreurs qu'il avait signalées dans les Tables de Taylor. En 1826, le même gouvernement lui avait fait offrir 30000 francs pour ses Tables; offre qu'il refusa par motif patriotique (*). Ayant une nombreuse famille à faire subsister, il fut réduit à établir une espèce de cantine, où il vendait des leçons aux aspirants, et des liqueurs et comestibles aux matelots. En 1832, ayant subi un examen pour être professeur d'hydrographie, il fut refusé; ce qui n'a rien de surprenant, car il n'avait malheureusement reçu aucune instruction littéraire. Il n'a jamais voulu faire connaître les procédés qu'il employait pour faire ses

---

(*) A l'appui de ce généreux dévouement, Bagay cite le témoignage de son concitoyen, M. Mathieu, astronome, membre de l'Institut.

calculs, auxquels il faisait travailler toute sa famille. Accablé de fatigues, de misère et d'ingratitude, Bagay eut des hallucinations, se figurant que Dieu, pour le récompenser de ses travaux mal appréciés sur la terre, lui envoyait la nuit des visions célestes, et madame Bagay écrivait chaque matin sur une *Connaissance des Temps* les visions nocturnes de son infortuné mari, qui fut délivré de ses maux et de la vie le 15 février 1851.

Bagay, dans sa jeunesse, avait cédé à son frère aîné toute sa part d'héritage. Bagay, mieux que savant, était un homme de cœur et n'a légué à sa famille qu'un souvenir honorable et des bras pour travailler. Septuagénaire, il avait offert à la maison de Didot la cession de tous ses droits en échange d'une pension viagère de 400 francs. La proposition fut acceptée et non réalisée. Devant le tribunal de l'équité, il semble que la famille a droit à quelque indemnité.

Bagay est le premier qui ait calculé des lignes trigonométriques de *seconde en seconde,* car l'ouvrage analogue de Shortrède est de 1844. C'est encore le seul qui existe en France. Il dispense de l'emploi incommode des parties proportionnelles.

Dans un écrit daté de Lorient 1er décembre 1821, signé par neuf capitaines de vaisseau, deux capitaines de frégate, seize lieutenants de vaisseau et sept enseignes, on lit : « *Comme navigateurs, nous devons applaudir d'avance au succès que M. Bagay ne pourra manquer d'obtenir, et nous nous empressons de lui exprimer notre gratitude en héritant du fruit de ses veilles.*

En France, la gratitude publique est très-souvent un arbre qui montre de belles fleurs, mais qui ne se nouent pas en fruit.

DIE GEOMETRISCHEN KONSTRUCTIONEN AUSGEFUHRT MITTELST DER GERADEN LINIE UND EINES FESTEN KREISES, ETC. Les Constructions géométriques exécutées au moyen de la ligne droite et d'un cercle fixe, comme sujet d'étude, dans les hautes institutions et pour l'utilité pratique; par *Jacob Steiner,* docteur en philosophie, professeur royal ordinaire à l'École d'industrie à Berlin. Berlin, 1833; in-8, 110 pages; 2 planches en taille-douce (*).

Introduction (1-6). Mascheroni (N. 1750, M. 1808) a montré comment on peut construire les problèmes à l'aide du compas seul. Le but du présent ouvrage est de construire les problèmes à l'aide de la règle et d'un cercle fixe donné de *grandeur* et de *position.* Il est divisé en quatre chapitres.

CHAPITRE Ier (6-29). Faisceaux et points harmoniques, transversales. A l'aide de ces propriétés, les problèmes suivants peuvent se résoudre avec la règle *seule.*

1°. Étant donnés trois points sur une droite, trouver un quatrième point *harmonique* sur cette droite.

2°. Étant donnés les trois rayons d'un faisceau, trouver le quatrième faisceau *harmonique.*

3°. Un angle droit et un angle quelconque ayant même sommet et un côté commun, doubler ce dernier angle.

4°. Étant donnés un angle et sa bissectrice, construire la bissectrice de l'angle adjacent.

5°. Par un point donné, mener une droite vers l'intersection *inaccessible* de deux points.

6°. G, H, I sont trois points donnés sur une droite

(*) Traduit en français par Carette et en allemand par Gruson (1825)

GH = HI, mener par un point quelconque K une parallèle à la droite GHI.

7°. Les droites GF, HI sont parallèles, GF est donné de grandeur et de position; trouver le milieu de GF.

8°. Deux parallèles sont données, mener, par un point donné, une troisième parallèle.

9°. GF, HI sont deux droites parallèles, GF est donnée de grandeur et de position : *a*. prendre sur la même droite, à partir du point donné M, une longueur MN qui soit un multiple donné de GF; *b*. partager GF en un nombre donné de parties égales ou en deux parties qui soient en rapport donné; *c*. trouver sur la même droite une longueur MN qui soit dans un rapport donné avec GF.

10°. BD, DC sont deux segments adjacents d'une droite et dans un rapport rationnel donné; par un point donné mener une parallèle à la droite.

11°. Un parallélogramme étant donné et une droite: *a*. mener par un point donné une parallèle à la droite; *b*. une longueur étant donnée, la multiplier ou la diviser un nombre donné de fois.

12°. Dans un plan on donne une de ces quatre données:

α. Trois parallèles qui coupent une droite en deux segments ayant un rapport rationnel donné;

β. Deux parallèles, une longueur sur la première et une longueur sur la seconde et qui sont dans un rapport rationnel donné;

γ. Deux parallèles et une droite partagée en deux segments qui sont dans un rapport donné;

δ. Deux longueurs non parallèles; chacune est divisée en deux segments suivant des rapports rationnels donnés.

Il s'agit : *a*. de mener une parallèle suivant une direction donnée; *b*. de partager une longueur donnée selon un rapport donné.

13°. Un carré est donné ; il s'agit, dans le plan du carré : *a.* d'abaisser d'un point donné une perpendiculaire sur une droite donnée ; *b.* de mener la bissectrice d'un angle droit donné ; *c.* de construire un multiple donné d'un angle donné.

C'est à Lambert qu'on doit toute cette géométrie de la règle.

CHAPITRE II (29-58). Propriétés harmoniques ; pôles et polaires (29-37) ; points de similitude (38-58) ; principaux théorèmes qui s'en déduisent et que l'auteur a donnés dans son *Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques* (*Gergonne*, t. XIX ; 1828) ; puissance d'un point relatif au cercle ; lieu d'égale puissance (59-67). Nous ne citons pas ces théorèmes qui sont maintenant du domaine public.

CHAPITRE III (67-89). Solution de tous les problèmes de géométrie avec la règle, lorsqu'un cercle fixe est donné. Les deux précédents chapitres donnent les moyens de solution des problèmes du chapitre III, but essentiel. Il est évident que le cercle fixe fournit : 1° un système de droites dont on connaît les milieux ; 2° un système de couple de droites parallèles ; 3° un système d'angles droits ; 4° un système d'angles égaux ; 5° un système de droites égales.

PROBLÈME I. *Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée.*

Lorsque la droite donnée est une corde, on construit la corde parallèle, et l'on est ramené à l'un des problèmes précédents.

Lorsque la droite ne coupe pas le cercle, par un point quelconque *a* de la droite on mène un diamètre, par un autre point quelconque du cercle on mène une corde parallèle à ce diamètre, on construit une seconde corde égale et parallèle à la première ; les deux cordes prolongées coupent la droite donnée en deux points b et c; on a $ab = ac$, et l'on est encore ramené à l'un des problèmes précédents.

PROBLÈME II. *Sur une droite une longueur est donnée, trouver: 1° une autre longueur multiple donnée de la première; 2° partager la longueur en un nombre donné de parties égales; 3° une longueur qui ait un rapport rationnel donné avec la longueur donnée.*

On mène une parallèle à la droite donnée, et l'on revient à un problème déjà résolu.

PROBLÈME III. *Par un point donné abaisser une perpendiculaire sur une droite.*

Solution. Par le centre on mène une parallèle à une droite et deux cordes cd, $c'd'$ égales et parallèles à ce diamètre; la corde cd' est perpendiculaire au diamètre. Il suffit de mener par le point donné une parallèle à cette dernière perpendiculaire.

L'auteur donne encore cinq autres problèmes qui peuvent toujours se ramener à la géométrie de la règle. Le dernier problème est celui-ci : Connaissant les centres et les rayons de deux cercles, construire les points d'intersection, bien entendu sans décrire les cercles. En disant que toutes les constructions portent l'empreinte d'une grande élégance, nous n'apprenons rien de nouveau à nos lecteurs, qui connaissent depuis longtemps le célèbre géomètre de Berlin.

L'ouvrage est terminé par un appendice qui contient vingt problèmes divers sur les coniques.

En voici quelques énoncés :

Une conique est donnée par cinq points ou cinq tangentes : 1° trouver l'intersection de cette conique par une droite donnée; 2° par un point donné, mener les tangentes à la conique.— Une conique est donnée par quatre points et une tangente, trouver le point de contact. —

Une conique est donnée par quatre tangentes et un point, mener la tangente en ce point. — Une conique est donnée par trois points et deux tangentes, trouver les deux points de contact et les tangentes passant par les trois points; et autres problèmes du même genre dont beaucoup ne sont qu'énoncés.

Deux coniques sont données par deux points en commun et chacune encore par trois points, trouver les deux autres points communs. — Deux coniques sont données par deux tangentes communes et chacune par trois autres tangentes, trouver les deux autres tangentes communes. Ces problèmes sont résolus. Le problème final est d'une utilité pratique : on donne un point d'un cercle dont le centre est visible, mais non accessible ; il s'agit de décrire le cercle par points.

Zusatze zu den logaritmischen und trigonometrischen Tabellen zur erleichtrung und abkurzung der bey an wendung der mathematik vorfallenden Berechnungen ausgefertigt; von *J.-H. Lambert*. Berlin, bey Haude und Spener Konigl. und der Acad. der Wissench. Buchhandler, 1770; in-8. Titre et préface, 2 p.; introduction, 98 pages; Tables, 210 pages.

Ces Tables, à joindre à celles des logarithmes, sont au nombre de quarante-quatre; plusieurs ont été adoptées et étendues. Un semblable recueil serait d'une immense utilité.

1°. Les plus petits diviseurs des nombres de 1 à 102000, d'après Pell, excepté les diviseurs 2, 3, 5.

2°. Produits de chacun des nombres de la Table précédente par les nombres 1, 2,.... 9, aussi d'après Pell.

3°. Produits des nombres premiers de 7 à 173 de 5 en 5.

4°. Liste des trois derniers chiffres (à droite) des carrés des nombres impairs.

5°. Formules pour les quatre cas où un nombre non divisible ni par 2 ni par 3 est la différence de deux carrés.

6°. Table des nombres premiers de 1 à 102000.

7°. Les soixante-dix premières puissances de 2.

8°. Les cinquante premières puissances de 3.

9°. Les cinquante premières puissances de 5.

10°. Formules pour e^x.

11°. Table pour e^{-x}.

12°. Formules pour les logarithmes hyperboliques.

13°. Logarithmes hyperboliques de 1 à 100, avec 7 décimales calculées par Lambert.

14°. Logarithmes hyperboliques des dix premières puissances de 10.

15°. Logarithmes hyperboliques d'après Simpson, de 1,01 à 10,00.

16°. Les dix premiers logarithmes hyperboliques avec 25 décimales d'après Euler.

17°. Tables des nombres compris dans la formule $2^m.3^n.5^p.7^q$ de 1 à 10^4.

18°. Formules pour les sinus, cosinus, tangentes hyperboliques.

19°. Expressions algébriques des sinus de 3 degrés en 3 degrés.

20°. Formules trigonométriques.

21°. Formules pour la résolution des triangles rectangles et obliquangles sphériques.

22°. π en fractions rationnelles.

23°. Longueurs des arcs de cercle de degré en degré.

24°. Formules cyclométriques.

25°. Table de Pythagore pour les sinus de chaque degré.

26°. Sinus, tangentes, sécantes et logarithmes des sinus et tangentes pour tous les 90 degrés.

27°. Formules pour la résolution des équations et principalement les équations de 2ᵉ et 5ᶜ degré.

28°. Formules pour les équations cubiques dont toutes les racines sont réelles; exemples.

29°. Ces racines depuis 0,001 jusqu'à 1,155.

30°. Formules pour toutes sortes d'équations cubiques.

31°. Divers cas d'équations bi-quadratiques.

32°. Fonctions hyperboliques semblables aux fonctions circulaires.

33°. Comparaison de l'hyperbole équilatère avec le cercle.

34°. Quelques expressions relatives aux racines carrées et cubiques.

35°. Les 1000 premiers carrés.

36°. Les 1000 premiers cubes.

37°. Nombres figurés.

38°. Formules d'interpolation.

39°. Puissances de séries infinies.

40°. Puissance des centièmes d'unité.

41°. Racines carrées des 100 premiers nombres avec 7 décimales.

42°. Racines carrées approchées en fractions.

43°. Racines carrées de $a \pm \sqrt{b}$, etc.

44°. Les coefficients de $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ et $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

SUR LA DÉFINITION GÉOMÉTRIQUE DE DIEU

(voir Nouvelles Annales, t XIII, p 366).

On lit un historique instructif sur cette célèbre définition dans l'ouvrage suivant, à la page 3 :

Pensées de Pascal, publiées dans leur texte authentique, précédées de la Vie de Pascal, par Mme Perrier, *avec un Supplément, et d'une Étude littéraire, et accompagnées d'un Commentaire suivi* (sic); par *Ernest Havet,* agrégé près la Faculté des Lettres de Paris. In-8, LVIII-548 pages; 1852 (*).

Vincent de Beauvais, précepteur des enfants de saint Louis, mort vers 1260, dans son *Speculum majus*, espèce d'encyclopédie, imprimée en 10 volumes in-folio, à Strasbourg, en 1573, dit au premier chapitre du *Miroir historique : Empedocles quoque sic Deum diffinire fertur: Deus est sphæra, cujus centrum ubique, circumferentia nusquam.* Et il dit (*Miroir de la Nature,* I, 4) qu'il a emprunté cette assertion à Hélinand, poëte du XII^e^ siècle, devenu moine et chroniqueur, et dont les écrits sont perdus.

On trouve la même pensée chez saint Bonaventure (1121-1174), contemporain de Vincent de Beauvais, dans son *Itinerarium mentis in Deum* (*Œuvres,* t. VII, p. 325; Mayence, 1609). C'est de là que le célèbre Gerson (Jean Charlier de) (1363-1429) a tiré cette même définition. Dans un ouvrage grec, intitulé Ποίμανδρης, *le Pasteur,* et attribué à Mercure Trismégiste, personnage fabuleux, on lit à la fin du XIII^e^ dialogue :

Ὁ κύκλος ὁ ἀθάνατος του Θεοῦ προσδεξάσθω μου τὸν λόγον.

« Le cercle immortel de Dieu accueille mon discours. » (Édition de Berlin, 1852.)

C'est par réminiscence que Rabelais dit (livre III, chapitre XIII) :

« *Nostre asme, lorsque le corps dort..., s'esbat et re-*

(*) C'est la seule édition qu'on devra désormais consulter. On y fait une parfaite dichotomie de Pascal, genie profond et toutefois janséniste timoré. Cette œuvre ne laisse rien à désirer sous le rapport de la philosophie, théologie, histoire et bibliographie. Quand nous donnera-t-on un semblable travail sur les *Provinciales* ?

veoit sa patrie, qui est le ciel. Dė là receoit participation insigne de sa prime et divine origine, et en contemplation de ceste infinie et intellectuale sphère, le centre de laquelle est en chascun lieu de l'univers, la circonférence point (c'est Dieu selon la doctrine de Hermes Trismégiste) *à laquelle rien n'advient, rien ne passe, rien ne dechet, tous temps sont présents, note non-seulement les choses passées... mais aussi les futures.* »

Pascal, qui, ainsi que Mallebranche et Descartes, faisait peu de cas de l'érudition historique, puisait la sienne dans les *Essais* de Montaigne; et on lit dans l'édition publiée par mademoiselle de Gournay, en 1635.

« *Trismégiste appelle la Déité cercle dont le centre est partout, la circonférence nulle part.* »

Il résulte de tout ceci que l'idée est d'origine grecque. Voltaire l'attribue à Timée de Locres. En effet, il y a des idées analogues dans le *Timée* de Platon; c'est ce qui a induit en erreur la mémoire de l'illustre philosophe. A cette occasion, M. Havet se permet de dire: « *C'est une de ses légèretés, pour ne pas dire plus.* »

C'est parler avec beaucoup de légèreté d'une des plus vastes, des plus belles intelligences qui aient paru sur le sol de la France. Nous ne saurions parler avec trop de modestie respectueuse de ces génies créateurs, lors même qu'ils s'égarent; car notre littérature, notre philosophie actuelles, comme ces goules qu'on rencontre dans les *Mille et une Nuits*, ne se repaissent que de cadavres, ne vivent plus que des morts.

GAUSS.

Euler et Gauss, deux génies identiques, ont tous deux profondément labouré, richement fécondé toutes les plages du vaste sol mathématique. Euler répandait sur ses découvertes un océan de lumière, dont les rayons pénètrent dans les recoins les plus obscurs; variant les expositions, ramifiant les applications, il sait assouplir ses méditations et les adapter aux intelligences de toute dimension.

Gauss ne vise qu'à la perfection logique et littéraire, ne veut produire que des œuvres accomplies, d'une rigueur inexorable; accumulant les preuves, ne les affaiblissant jamais par condescendance; présentant la théorie sous diverses faces, mais conservant toujours la dignité de la sévère abstraction. Il a peu écrit; mais chaque écrit est un modèle de style, un chef-d'œuvre de raisonnement. Dans la géométrie vulgaire et supérieure, dans l'algèbre des quantités finies et infinitésimales, dans la mécanique rationnelle, en dynamique céleste, partout on rencontre l'empreinte de ses pas : des pas de géant. Quels magnifiques théorèmes sur l'élément superficiel, sur l'élément attractif potentiel, sur l'élément magnétique! Quel admirable remaniement des méthodes géodésiques, des orbites planétaires et cométaires! Et toutefois ce ne sont pas là les plus brillants joyaux de sa couronne d'immortalité.

La science de la quantité se divise en deux parties bien distinctes : l'une renferme pour ainsi dire quelque chose de terrestre, de matériel; l'idée du nombre est attachée à deux formes : *espace* et *temps;* formes inhérentes à une intelligence humaine, à un esprit asservi à des organes. Dans l'autre partie, qu'avec Ampère nous nommons *arithmologie*, règne l'idée *pure*, le nombre est débarrassé de ses deux entraves anthropologiques; idée *pure*, qui est pour ainsi dire un reflet, l'ombre du paradigme divin, comme s'expriment les écoles de Pythagore et de Platon. Il y a encore une autre différence moins essentielle et très-importante. Dans les questions qui s'agitent dans la première partie, l'esprit découvre presque toujours à première vue des points d'appui d'où il peut prendre son essor, des guides pour diriger cet essor, des instruments très-commodes, aisément maniables, pour opérer avec promptitude et facilité; tandis que, dans la seconde partie, la science du nombre pur, tous ces moyens font défaut. Dépourvu d'auxiliaires, livré à lui-même, l'esprit est obligé de tout créer, d'inventer de toute pièce la solution de chaque question. Aussi l'arithmologie semble être, en mathématique, le vrai critérium de l'intensité intellectuelle. Où cette intensité se manifeste-t-elle avec plus de vigueur, sujet incessant de surprise et d'admiration, que dans les *Disquisitiones*? Chaque chapitre développe une idée nouvelle; chaque idée nouvelle est une création. Les congruences, les résidus potentiels, les nombres complexes, les formes similaires rattachées aux déterminants ont fondé un monde, inauguré une ère, l'ère de Gauss. La statue qui transmettra ses traits à la postérité, pour représenter fidèlement la physionomie intérieure, devrait dépasser nature; et que de richesses, hélas! Gauss emporte au tombeau. Sa mission est terminée; remercions la Providence d'avoir accordé au genre humain un tel missionnaire pendant une longue carrière. On peut dire de lui ce que Cicéron dit de l'orateur Calidius (*de Clar. Orat.*, LXXIX) : NON FUIT *geometra* UNUS E MULTIS, POTIUS INTER MULTOS PROPE SINGULARIS FUIT.

Gauss a vu le jour, le 23 avril 1777, dans le duché de Brunswick. Ayant donné des indices très-précoces d'heureuses dispositions, il attira l'attention du duc régnant, Charles-Guillaume-Ferdinand, qui ne cessa de protéger toute la carrière scientifique de son illustre sujet. Honneur à l'illustre mécène!

Gauss fut nommé professeur à l'université de Gottingue en 1807; conseiller de cour (*hofrath*) en 1816, et ensuite directeur de l'observatoire astronomique et de l'observatoire magnétique; il est mort à Gottingue le 23 février 1855, âgé de soixante-dix-huit ans.

Ses principaux ouvrages sont :

1°. *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* In-4; Helmstadt, 1799. (*Voir* Prouhet, *Nouvelles Annales*, tome IV, page 441.)

2°. *Disquisitiones arithmeticæ.* In-8, 1801.

3°. *Theoria motus corporum cœlestium.* In-4, 1809. A contribué puissamment à faire entrer l'esprit d'exactitude dans les calculs astronomiques.

4°. *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiæ.* Premier emploi de la méthode des moindres carrés en Allemagne.

5°. *Dissertations sur la haute géodésie.* Par ordre du gouvernement il continua, à travers le royaume de Hanovre, l'arc du méridien mesuré en Danemark. A cette occasion il inventa un *héliostat*, instrument qui rend visibles, par la réflexion des rayons solaires, les stations les plus éloignées.

6°. *Observations magnétiques*, publiées annuellement depuis 1837, avec la collaboration de Weber (Willhelm). Le gouvernement fit élever, à côté de l'observatoire, un édifice destiné aux observations magnétiques. Gauss, par ses travaux sur le magnétisme terrestre, donnant à cette théorie difficile une nouvelle face, se livra à de nombreuses observations, consignées aussi dans l'*Atlas du magnétisme terrestre*. Leipzig, 1840

7°. Les *Commentaires de la Société royale de Gottingue* contiennent un grand nombre de Mémoires de Gauss, remarquables par la profondeur des recherches et aussi par l'élégance du style. Nous en donnerons la liste; espérons qu'on en publiera la collection.

BIBLIOGRAPHIE.

ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE, à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Écoles du Gouvernement; par M. *E. Lionnet*, agrégé de l'Université, professeur de Mathématiques pures et appliquées au Lycée impérial Louis-le-Grand, examinateur suppléant d'admission à l'École Navale. Rédigée conformément aux *Programmes officiels* des Lycées. Paris, 1855; in-8 de 245 pages (*).

Ouvrage classique, bien soigné, entièrement conforme au règlement d'exercices qui régit maintenant l'enseignement universitaire. La réputation de l'auteur est si bien établie, qu'il est presque superflu de dire que sa tâche est remplie et son but atteint. L'auteur établit très-clairement la division sur le principe de l'homogénéité algébrique; la multiplication repose sur la définition d'Euclide : c'est la bonne manière et qui donne sans embarras la règle des signes. Il y a quelques énoncés qu'on pouvait omettre; par exemple celui-ci: *Lorsque plusieurs fractions sont égales entre elles, la somme des numérateurs divisée par celle des dénominateurs forme une fraction égale à l'une quelconque des fractions proposées* (p. 41). Il ne faut pas trop se défier de la spontanéité du lecteur.

Le livre II (p. 45) traite des équations du premier

(*) Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : $3^{fr},50$.

degré. Avant de résoudre une équation, on enseigne, comme principe, la manière d'*altérer* une équation (p. 47). Cette disposition ne me semble pas naturelle. Ainsi, on dit qu'on altère l'équation $x - 3 = 0$ en l'élevant au carré $(x - 3)(x - 3) = 0$, parce que celle-ci admet *deux fois* la solution $x = 3$, tandis que la première équation ne l'admet qu'*une fois*. Cela suppose des idées que l'élève ne peut avoir en ce moment-ci.

L'auteur établit la notion des quantités négatives sur des considérations cinématiques et aboutit à des *conventions : il suffira de convenir* (p. 70). Avec d'autres conventions on obtiendrait donc d'autres solutions; assertion singulière. Il me semble que tout se ramène à ces deux questions : Dans l'équation $x + 1 = 0$, que doit-on écrire au lieu de x? *Réponse :* -1. Un homme a 1 franc d'actif, que doit-on lui donner pour qu'il n'ait rien? *Réponse :* 1 franc de passif. César est le premier qui ait eu une idée nette des quantités négatives. Il disait : « Si quelqu'un me donnait quinze millions de sesterces, je serais au niveau d'un homme qui n'a rien. » Il avait autant de dettes. Il en est de même des quantités imaginaires. Dans l'équation $x^2 - 4 = 0$, que doit-on écrire pour x? *Réponse :* $+\sqrt{4}$ ou $-\sqrt{4}$ *ad libitum*. Que doit-on écrire pour x dans l'équation $x^2 + 4 = 0$? *Réponse :* écrivez -4 au lieu de x^2, ou, *mnémoniquement*, écrivez au lieu de x, $+\sqrt{-4}$ ou $-\sqrt{-4}$, signe qui rappelle qu'il faut remplacer x^2 par -4.

Il est utile pour les commençants d'employer un signe particulier, par exemple ⇸ pour désigner les quantités positives et le signe ⇷ pour les quantités négatives, et de montrer ensuite qu'on peut se dispenser d'écrire ces signes.

L'affirmation étant l'opposé de la négation, les quantités positives devraient s'appeler quantités *affirmatives*.

Ces dénominations erronées proviennent du *jeu* qui a donné naissance à l'Algèbre. Quand on était amené à retrancher un nombre d'un autre plus petit, on *niait* l'exactitude des *données* ou bien on déclarait le problème impossible; de là le nom de *fausses* donné aux quantités négatives. Les dénominations *progressives* et *regressives* me semblent plus convenables.

L'auteur passe en revue les cas *d'impossibilité, d'indétermination*, avant d'aborder la discussion des équations du premier degré à une et à deux inconnues.

Le livre III est consacré à l'équation du deuxième degré. A la page 163, on lit: *Les racines imaginaires d'une équation n'indiquent pas toujours l'impossibilité du problème;* proposition chanceuse. Il s'agit de diviser la droite AB en deux segments tels, que la longueur $AB = a$ soit moyenne proportionnelle entre les deux segments. Soit C le point de division; en prenant ce point C entre A et B, les deux segments CA, CB, de directions opposées, doivent, suivant le principe de M. Chasles, être de signes opposés: l'un étant désigné par $+x$, l'autre doit être désigné, non par $a - x$, mais par $x - a$, et l'on a

$$x(x - a) = a^2;$$

les deux racines sont réelles et indiquent deux points, l'un situé à la droite de B et l'autre à la gauche de A.

En général, pour toute question, quelle qu'elle soit, l'Algèbre ne donne que des solutions numériques, mais elle ne prétend pas donner des règles pour l'interprétation de ces solutions. Elle s'en rapporte au bon sens, dont rien ne dispense.

La théorie élémentaire des maxima et minima est donnée d'une manière complète et rigoureuse.

Le livre IV et dernier contient les deux progressions, les logarithmes, les intérêts composés et les annuités.

Chaque livre est terminé par un bon nombre de questions intéressantes auxquelles s'exerceront utilement les candidats aux Écoles du Gouvernement.

On ne trouve dans cet ouvrage aucun nom propre, aucun renseignement historique; suppléons-y.

Les signes $+$, $-$ se trouvent pour la première fois dans la *Coss* de Christophe Rudolf (1524). Le signe $=$ est de Robert Record (*The whetstone of wit, etc*; 1557). Descartes se sert encore de la lettre *a* retournée ($\propto$). Viète (1540-1603) est le premier qui ait représenté des nombres par des lettres, mais par des lettres capitales; les petites lettres sont de Thomas Harriot (*Artis analyticæ praxis, etc*; 1623). Les signes $>$, $<$ sont aussi de Harriot. Les *parenthèses* entre crochets sont d'Albert Girard (*Invention nouvelle, etc.*; 1629).

Cet ouvrage, dont nous avons cru devoir critiquer quelques parties, se distingue par un esprit de rigueur bien rare aujourd'hui. La médiocrité seule est à l'abri de toute critique.

L'*Algèbre élémentaire* de M. Lionnet sera prochainement suivie d'un autre ouvrage, qui complétera la première année d'algèbre pour les candidats à l'École Polytechnique, et ce qui est exigé pour l'admission à l'École centrale des Arts et Manufactures (*).

(*) *Complément d'Algèbre élémentaire* (Sous presse.) In-8. — Prix : 1 fr.

NOTICE SUR LA DÉCOUVERTE DES LOGARITHMES

(voir page 1).

Neper étant mort en 1617, son fils Robert publia en 1619 cette seconde édition de l'œuvre de son père, où le procédé des logarithmes est expliqué (*).

Mirifici logarithmorum Canonis descriptio, ejusque usus in utraque Trigonometria, ut etiam in omni logistica mathematica, amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio. Accesserunt opera posthuma : Primo, Mirifici ipsius Canonis constructio et logarithmorum ad naturales ipsorum numeros habitudines. Secundo, Appendix de alia, eaque præstantiora logarithmorum specie construendis. Tertio, Propositiones quædam eminentissimæ, ad triangula sphærica mira facilitate resolvenda; authore ac inventore JOANNE NEPERO, barone MERCHISTONII, etc., Scoto. Edinburgi, excudebat Andreas Hart, anno 1619; in-4; 18 feuilles trois quarts.

Les *Opera posthuma* ont ce titre particulier :

Mirifici logarithmorum Canonis constructio una cum appendice de alia atque præstantiore logarithmorum specie condenda, quibus accessere propositiones ad triangula sphærica faciliore calculo resolvenda : Una cum annotationibus aliquot doctissimi D. Henrici Briggii, in eas et memoratam appendicem; authore et inventore

(*) Un exemplaire de la première édition (1614) est à la bibliothèque de l'Institut. Il a été acquis en 1834 à la vente des livres de J.-F. Français, professeur d'art militaire à l'École d'Application de Metz. Ces livres ont appartenu à Arbogast, qui les a légués à son disciple et neveu F. Français, mort en 1810, professeur à l'École d'Artillerie de Mayence ; c'est le frère du professeur sus-nommé

JOANNE NEPERO, barone MERCHISTONII, etc., Scoto. Edinburgi, excudebat Andreas Hart, anno Domini 1619.

En tête des *Opera posthuma* est une préface de Robert Neper où il donne en deux pages le contenu de ces œuvres posthumes.

Dans la *Canonis constructio,* J. Neper dévoile le secret du calcul des logarithmes. Il fonde ce calcul sur cette considération cinématique. Soient deux points fixes A et B pris sur une droite indéfinie; deux points L et N partent simultanément de A et se dirigent vers B, avec la même vitesse *initiale,* représentée par $\frac{AB}{n}$, où n est un nombre donné; le point L conserve toujours la même vitesse $\frac{AB}{n}$; de sorte qu'il décrit d'un mouvement uniforme la droite AB, indéfiniment prolongée. Il n'en est point ainsi du point N, dont la vitesse va sans cesse en diminuant, car elle est toujours présentée par la distance de ce point au point fixe B, distance divisée par n; ainsi P étant le point d'arrivée de N au bout du temps t, la vitesse sera représentée par $\frac{PB}{n}$; l'espace segmentaire que décrit le point N va donc toujours en diminuant, et il mettra un temps infini à parvenir en B où sa vitesse sera éteinte, pour devenir négative au delà de B. Voici comment Neper définit ces deux mouvements :

Arithmetice crescere est æqualibus temporibus æquali semper quantitate augeri (page 5);

C'est le mouvement du point L.

Geometrice decrescere est æqualibus temporibus quantitatem primo totam inde aliam ejus partem superstitem simili semper proportionali parte decrescere (page 14);

C'est le mouvement du point N.

Neper ajoute :

Numerus artificialis (*) *sinus dati est qui arithmetice crevit tanta semper velocitate quanta sinus totus incipit geometrice decrescere;*

C'est-à-dire le nombre artificiel d'un sinus donné est celui qui s'est accru arithmétiquement, avec la même vitesse constante qu'avait le sinus total lorsqu'il a commencé à décroître géométriquement; accroissement qui a eu lieu dans le même temps que le sinus total a mis pour devenir égal, en décroissant, au sinus donné. AB est le sinus total; le but essentiel de Neper étant de faciliter les calculs trigonométriques, il s'attache principalement aux logarithmes des lignes trigonométriques.

Traduisons ces considérations en caractères algébriques.

Soient :

$d =$ AB $=$ sinus total;

$x =$ chemin décrit arithmétiquement par le point L, dans le temps T;

$y =$ chemin décrit géométriquement par le point N, dans le même temps T;

$md =$ vitesse initiale commune aux points L et N;

$d - y =$ distance du point N au point B, au bout du temps T.

Soit T partagé en un nombre n infiniment grand de temps égaux t infiniment petits, de sorte que $T = nt$; prenons t pour unité de temps; alors, à la fin des temps, $0, t, 2t, 3t, \ldots, nt$ les valeurs correspondantes de x seront $0, md, 2md, 3md, \ldots, nmd$ et les valeurs correspondantes de $d - y$ seront

$$d,\ d(1-m),\ d(1-m)^2,\ d(1-m)^3, \ldots, d(1-m)^n:$$

(*) On lit en marge le mot *Logarith.* *Numerus artificialis* est le premier nom qu'avait adopté Neper, il n'a trouvé le mot *logarithme* que longtemps après la composition de cet écrit.

donc au bout du temps T on aura

$$x = nmd, \quad y = d - d(1-m)^n = d - d\left(1 - \frac{x}{nd}\right)^n,$$

$$y = d\left[\frac{x}{d} - \frac{n.n-1}{1.2}\frac{x^2}{n^2 d^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\frac{x^3}{n^3 d^3} - \ldots\right];$$

or n étant infiniment grand, on a

$$y = d\left[\frac{x}{d} - \frac{1}{1.2}\frac{x^2}{d^2} + \frac{1}{1.2.3}\frac{x^3}{d^3} - \frac{1}{1.2.3.4}\frac{x^4}{d^4} + \ldots\right],$$

$$= d - de^{-\frac{x}{d}},$$

où e est la base des logarithmes hyperboliques

$$\frac{d-y}{d} = e^{-\frac{x}{d}}, \quad -\frac{x}{d} = \log \text{hyp.} \frac{d-y}{y};$$

$$x = -d \log \text{hyp.} \frac{d-y}{d}.$$

Mais x est le logarithme népérien de $d-y$; donc

$$\log \text{nép. de } d-y = -d \log \text{hyp. de } \frac{d-y}{d}.$$

Ainsi les logarithmes de Neper ne sont pas identiques aux logarithmes hyperboliques. Lacroix a donné pourtant le nom de *népériens* aux logarithmes hyperboliques, et avec justice, afin d'attacher à l'invention le nom de l'inventeur.

Neper prend

$$d = 10^7 = \sin 90^\circ,$$

$$\frac{d}{2} = 5.10^6 = \sin 30^\circ.$$

Dans la Table de Neper on trouve

$$\log \sin 30 = 6931471,808942;$$

or

$$\frac{d-y}{d} = \frac{1}{2}, \quad \log \text{hyp} \frac{1}{2} = -0,6931471805599 \quad \text{(Callet)}$$

Pour avoir le logarithme népérien, il faut multiplier ce nombre par -10^7 (*voir* ci-dessus), et l'on trouve

$$69314771{,}805599;$$

l'erreur de Neper n'est donc que de 3 unités par excès sur la dixième décimale.

Pour calculer les logarithmes, Neper n'emploie pas les séries; il calcule directement les termes successifs de la progression d, $d(1-m)$, $d(1-m)^2, \ldots, d(1-m)^{100}$, et prend $d=10^7$, $m=10^{-7}$. Le calcul devient extrêmement facile : il suffit de retrancher de chaque terme ce même terme divisé par 10^7, et l'on obtient le terme suivant. Ainsi il fait emploi des décimales et les écrit comme nous faisons aujourd'hui, à l'exception que, pour séparer les entiers, il prend un point au lieu de la virgule. (*Nouvelles Annales*, tome XII, page 204.)

Voici un spécimen de son calcul :

d.........	10000000.0000000
	1.0000000
$d(1-m)$...	9999999.0000000
	0.9999999
$d(1-m)^2$...	9999998.0000001
	.9999998
$d(1-m)^3$...	9999997.0000003

et continuant ainsi, il trouve

$$d(1-m)^{100} = 9999900.0004960;$$

or

$$d(1-m)^{100} = 10^7(1-10^{-7})^{100};$$

si l'on développe le binôme et qu'on pousse jusqu'à 10^{-21}, on trouve

$$d(1-m)^{100} = 9999900.000499838300392122,$$

ce qui diffère très-peu du nombre de Neper.

Pour apprécier le degré d'exactitude de ses calculs, Neper démontre, par des considérations géométriques, que $\log(d-y)$ est compris entre y et $\frac{dy}{d-y}$; chaque fois qu'il a besoin d'un logarithme exact, il calcule ces deux limites, et lorsqu'elles diffèrent moins que l'ordre de la décimale qu'il veut conserver, il prend la moyenne arithmétique entre ces limites pour logarithme exact. Ceci peut s'établir analytiquement; en effet,

$$\log \text{nép.}\, d-y = -d \log \text{hyp.} \left(1-\frac{y}{d}\right)$$

$$= y + \frac{1}{2d}y^2 + \frac{1}{3d^2}y^3 + \frac{1}{4d}y^4 + \ldots$$

$$\frac{dy}{d-y} = \frac{y}{1-\frac{y}{d}} = y + \frac{y^2}{d} + \frac{y^3}{d^2} + \frac{y^4}{d^3} + \ldots;$$

prenant la moyenne arithmétique entre y et $\frac{dy}{1-y}$, on obtient

$$y + \frac{y^2}{2d} + \frac{y^3}{2d^2} + \frac{y^4}{2d^3} + \ldots.$$

La différence entre cette moyenne et le logarithme népérien de $d-y$ ne commence qu'au terme du troisième ordre; cette différence est

$$\frac{1}{2}\frac{y^3}{d^2} - \frac{1}{3}\frac{y^3}{d^2} = \frac{1}{6}\frac{y^3}{d^2}.$$

Pour que cette différence s'élève à une unité de l'ordre 10^{-14}, il faut que y soit égal à $\sqrt[3]{6}$, que y soit compris entre 1 et 2. Posons pour exemple

$$y = 1,$$

alors

$$d - y = 9999999,$$

$$\frac{dy}{d-y} = \frac{10^7}{10^7-1} = 1,00000\,01000\,00001:$$

la moyenne entre y et $\frac{dy}{d-y}$ est

$$1\,0000\,05.$$

Tel est donc, à très-peu près, le logarithme népérien de

$$9999999 = 10^7 - 1.$$

En effet, on a

$$\log \text{nép.}\, 10^7 - 1 = -10^7 . \log \text{hyp.}\, 1 - 10^{-7}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\, 10^{-7} + \frac{1}{3} \cdot 10^{-14} + \frac{1}{4} \cdot 10^{-21} + \ldots$$

$$= 1{,}00000\,005\,0000\,3333.$$

Le résultat de Neper n'est donc en erreur que d'un tiers d'unité sur la quatorzième décimale.

Ainsi le logarithme népérien de $10^7(1-10^{-7}) = 9.999999$ est $1{,}0000000 5$, moyenne arithmétique entre

$$1 \text{ et } \frac{10^7}{10^7 - 1} \text{ et } \log 10^7(1 - 10^{-7})^{100} = \log 9999900 = 100{,}00050.$$

Ce nombre 9999900 sert à Neper pour une seconde Table de progression géométrique dont la raison est

$$\frac{9999900}{10^7} = \frac{99999}{10^5} = \frac{10^5 - 1}{10^5} = 1 - \frac{1}{100000}:$$

le cinquantième et dernier terme de cette Table est $9995001{,}222927$; Table qui se calcule aussi par soustraction en partant de $d = 10^7$, comme précédemment; ayant le logarithme de 9995000, il construit une troisième Table de progression géométrique ayant pour raison

$$\frac{9995000}{10^7} = \frac{9995}{10^4} = 1 - \frac{1}{2000}.$$

Cette Table n'a que vingt termes et sert à calculer les logarithmes de 9990000 et 9900000.

A l'aide de ces trois Tables, il construit une quatrième Table qu'il nomme *Table radicale*, parce qu'en effet elle est fondamentale. Cette Table consiste en soixante-neuf colonnes verticales chacune de vingt et un termes écrits à côté les uns des autres. Le premier terme de la première colonne est 10^7 ; ensuite les soixante-neuf premiers termes, formant la première ligne horizontale, suivent une progression géométrique dont la raison est

$$\frac{99}{100} = 1 - \frac{1}{100};$$

ensuite les nombres de chaque colonne suivent aussi une progression géométrique dont la raison est

$$\frac{10^7}{10^7 - 500} = 1 - \frac{1}{2000}.$$

Chaque colonne est divisée en deux parties par une ligne verticale; la première partie contient les nombres naturels, termes des progressions géométriques dont on vient de parler, et la seconde partie contient les logarithmes correspondants faciles à calculer : car, pour la première ligne horizontale, les logarithmes forment une progression arithmétique dont la raison est 100503,3585228, logarithme de 9900000; de même, dans chaque colonne verticale, les logarithmes forment une progression arithmétique dont la raisen est 5001,25041645, logarithme de 9995000, et ces deux derniers logarithmes ont été calculés ci-dessus. Le dernier des nombres naturels de la Table radicale est 4998609,4034 qui est à peu près la moitié de 10^7, par conséquent à peu près égal au sinus de 30 degrés; son logarithme est 6934253,4. Pour trouver les logarithmes des sinus des arcs moindres que 30 degrés Neper fait usage de ce théorème :

$$\log(d - y_1) - \log(d - y_2)$$

est compris entre $\frac{y_2 - y_1}{d - y_2}\, d$ et $\frac{y_2 - y_1}{d - y_1}\, d$

Ceux qui désirent plus de détails peuvent consulter l'analyse étendue du *Mirifici logarithmorum, etc.*, qu'a donnée M. Biot dans le *Journal des Savants* (1835, p. 354), et dont nous avons tiré en partie ce qui précède.

Remarquons que l'on a

$$\text{log nép. } a + \text{log nép. } b = \text{log nép. } \frac{ab}{d},$$

$$\text{log nép. } a - \text{log nép. } b = \text{log nép. } \frac{ad}{b},$$

formules incommodes. Aussi dans l'appendice *De alia atque præstantiore, etc.*, Neper propose de prendre $d = 1$ au lieu de $d = 10^7$; alors

$$\log 1 = 0 \quad \text{et} \quad \text{log nép. } a = -\text{log hyp. } a,$$

les logarithmes de Neper sont positifs ou négatifs selon que a est moins grand ou plus grand que l'unité.

John Speidel a remédié à cet inconvénient dans l'ouvrage suivant dont la 1re édition est de 1619, la 3e de 1621 et la 6e de 1624 :

New logarithmes the first invention whereof was by the lord Nepair, baron of Merchiston, and printed at Edinburg in Scotland, anno 1614. *In whose use was and is required the knowledge of algebrical addition and soubstraction according to + and —. These being extracted from and out of them (they being first oversee corrected and amended) require not all any skill in algebra or cossike numbers, but may be used by every one that can onely adde and substract in whole numbers according to the common or vulgar arithmeticke; without any consideration or respect of + and —*; by John Speidel, professor of the Mathematiks, and are to be sold at his dwelling house in the fields, on the back side of Drury Lane, between Princes street and the Playhouse. The 3 impression, in-4, 1621.

« Nouveaux logarithmes, dont la première invention est de lord Jean Nepair, baron de Merchiston, est imprimée à Édimbourg en 1614, mais dont l'usage exige la connaissance des additions et soustractions algébriques fondées sur les signes + et —; ici on a laissé ces signes de côté et l'on n'a plus besoin d'aucune notion algébrique ni de nombres cossiques: il suffit de connaître seulement l'addition et la soustraction selon l'arithmétique vulgaire, sans égard aux signes + ou —. Se vend chez l'auteur à sa maison dans les champs, près de Drury Lane, etc. »

Cette annonce explique le rapide débit de l'ouvrage. Les nouveaux logarithmes de Speidel sont les compléments arithmétiques des logarithmes de Neper rapportés à $d = 1$; de sorte que

$$\log \text{Speidel}\, a = \log \text{nép.}\, \frac{1}{a},$$

et au lieu de faire décroître les nombres de 1 vers zéro, Speidel les fait croître de zéro à 1 et trouve ainsi

$$\log 10 = 2302584;$$

ce sont les premiers logarithmes hyperboliques que l'on ait calculés, il vont de 1 à 1 000.

John Speidel est le père d'Euclid Speidel qui a publié à Londres, en 1688, une *Logarithmotechnie*, où il montre qu'on peut calculer géométriquement les logarithmes avec 25 décimales en carrant des hyperboles.

BIOGRAPHIE.

VEGA ET LALANDE.

Ce qui suit est extrait d'une Lettre de M. Fournerat, juge honoraire au tribunal civil de la Seine, retiré à Ancy-le-Franc. Parvenu à son quinzième lustre, il charme sa vieillesse, par la lecture des ouvrages des géomètres dont il possède une belle collection. C'est bien là *Otium cum dignitate*.

« Il y a environ vingt ans (en 1834), j'ai eu l'occasion de faire l'acquisition d'un fort bel exemplaire du *Thesaurus logarithmorum* de Vega, in-folio; 1794. Ce volume provenait de M. de la Grave, ancien proviseur du lycée de Pau, auteur de l'article *Sinus* du *Dictionnaire de l'encyclopédie méthodique*. Le même exmplaire avait appartenu à Lalande, qui en a fait corriger toutes les fautes, et lui avait été adressé en présent par Vega même, avec une Lettre de sa main inscrite sur une des gardes. Je vous demanderai la permission de vous faire passer copie de l'autographe de cet habile et infortuné calculateur, qui à cette époque servait dans l'armée autrichienne. Peut-être est-ce le seul autographe de Vega qui existe en France.

Astronomo longe celeberrimo Josepho Hieron. Lalandio S. P.

Accipe, vir clarissime, animo benevolo, opus istud tormentorum inter tonitru in lucem editum, sinceræ meæ erga merita tua immortalia venerationis testimonio, et grati animi pro fructibus quos ex lucubratione operum tuorum pauculis haurire potui pacis horis documento tibi missam. Vale.

Dabam Manheimii ad Rhenum. Die 22 *decemb.* 1795. *Georgius Vega.*

Manheim avait été alors repris sur les Français commandés par Pichegru; l'armée autrichienne était commandée par Clairfayt. »

Note du Rédacteur. En 1802, Vienne fut consternée en apprenant la mort de Vega, noyé dans le Danube (*). On pensait à un suicide, attribué, dit-on, au chagrin qu'un passe-droit faisait éprouver au colonel. Telle était l'o-

(*) Né en 1754.

pinion publique sur cette catastrophe, lorsque, sept années après, en 1811, un régiment d'artillerie vint à passer par Vienne. L'officier qui surveillait la salle du dessin vit entre les mains d'un canonnier un rapporteur en cuivre, portant le nom de *Vega*, et le canonnier dit que le bourgeois chez lequel il logeait, lui avait prêté cet instrument, et il disait vrai. Ce bourgeois était un meunier; interrogé sur la possession de cet instrument, le meunier fit des réponses embarrassées, et l'on se rappela que c'était chez lui que Vega était descendu pendant son séjour à Vienne. Instruite de ces faits, la justice fit des poursuites. Mis en prison, et après plusieurs interrogatoires, le meunier fit cet aveu : « Lorsque Vega vint chez moi
» en 1802, j'avais un très-beau cheval auquel j'étais pas-
» sionnément attaché. Le colonel me demanda à diverses
» fois de le lui vendre. J'ai constamment refusé; mais il
» finit par offrir un si haut prix, que je cédai, et afin
» que je ne pusse changer de résolution, il me paya
» comptant et la livraison devait avoir lieu dans la soirée.
» A l'heure convenue, nous nous rendîmes à l'écurie, et
» pour cela il fallait passer par-dessus une passerelle,
» jetée sur le cours d'eau dérivé du Danube et qui fait
» aller le moulin. Arrivé sur la passerelle, j'eus un si
» violent regret de me séparer de mon cheval, que l'idée
» diabolique s'empara de moi de garder l'argent et le
» cheval. Il faisait très-obscur. Le colonel marchait de-
» vant moi: je lui donnai une forte secousse; il tomba
» dans l'eau et disparut. »

D'après cette déclaration, l'assassin mourut sur la potence. Ainsi cet incident providentiel lava d'un soupçon injurieux la mémoire du célèbre artilleur.

En France, dans l'état actuel du jury, le malheureux meunier, entraîné par un vertige momentané de fébrile cupidité, aurait obtenu la faveur des circonstances atténuantes.

———

MATHURIN JOUSSE.

« Mon cher Monsieur Terquem,

» En recevant hier votre Lettre, je me suis empressé de faire des recherches au sujet de Mathurin Jousse, et je suis heureux de pouvoir vous transmettre quelques renseignements, ignorés des biographes, et d'une exactitude authentique.

» La *Biographie* Michaud ne donne ni le lieu ni la date de sa naissance et de sa mort; je puis, comme vous allez le voir, combler cette lacune importante.

» Je commencerai d'abord par transcrire un passage relatif à Mathurin Jousse, que je tire d'un livre publié par un des fonctionnaires du Prytanée, et intitulé : *Histoire de l'École de la Flèche, depuis sa fondation par Henri* IV *jusqu'à sa réorganisation en Prytanée impérial militaire;* par Jules Clère; in-18 ; la Flèche, 1853.

» Je transcris donc à peu près littéralement.

« .... L'enseignement du collége de la Flèche exerça
» encore une heureuse influence sur le développement
» des arts mécaniques parmi les ouvriers de la ville. De ce
» nombre fut Mathurin Jousse, *né à la Flèche le*
» 27 *août* 1607 (*), et qui dut comme externe fréquenter
» les cours vers l'année 1622. Il se livra de bonne heure à
» la mécanique, dut faire très-jeune son tour de France
» et aller en Dauphiné et *en la Franche-Comté,* d'a-
» près la manière dont il parle de la mode de l'un et des
» petits hachereaux de l'autre; et dès 1627, n'ayant que
» 20 ans, fit imprimer à la Flèche deux traités avec gra-
» vures sur acier et sur bois, dont l'un a pour titre : *La*
» *fidèle ouverture de l'art du serrurier, où l'on voit les*

(*) Cette date est authentique, je l'ai encore relevée moi-même aujourd'hui sur les registres de la ville de la Flèche. (E. Coupy.)

» *principaux préceptes, dessins et figures touchant les* » *expériences et opérations manuelles dudit art, ensem*» *ble un petit traité de diverses trempes*, le tout fait et » composé par Mathurin Jousse de la Flèche. A la pre» mière page se lit une humble dédicace aux Pères du col» lége : Messieurs, le lustre et l'éclat incomparable de la » doctrine et vertu que vous professez avec une admira» tion singulière de tout l'univers, sembleraient me devoir » rendre timide et craintif d'approcher de vous pour vous » présenter et consacrer ce rude et mal poly mien petit » labeur, etc....

« Le second ouvrage est intitulé : *Le théâtre de l'art du* » *charpentier enrichi de diverses figures, avec l'inter*» *prétation d'icelles, terminé par un brief traité des cinq* » *ordres des colonnes*. Ces deux ouvrages différents ont » pu faire croire que Jousse était serrurier ou charpentier. » Il fut encore l'auteur d'un livre ayant pour titre : *Le* » *secret de l'architecture découvrant fidèlement les traits* » *géométriques, coupes et dérobements nécessaires dans* » *les bâtiments*. Il publia en dernier lieu la *Perspective* » *positive*.

» Jousse commença par le métier et arriva à l'art et à la » science, l'érudition même marchant de pair à côté. Il » cite Vitruve, Diego, Lagredo, Vignole; il parle nom» bres et proportions géométriques comme un mathéma» ticien ; il versifie comme un poëte du temps et même » mieux, et sa prose, simple et claire, mais arriérée, et » tenant plus du XVI^e^ que du XVII^e^ siècle, a très-souvent le » charme du doux style d'Amyot.

» L'église du collége est embellie de l'une de ses œuvres : » il travailla aussi au château de la Varenne, et parmi » les différentes inventions mécaniques dont il fut l'au» teur, on a longtemps admiré un fauteuil et une chaise » avec lesquels on pouvait avancer ou reculer et se tour» ner en tous sens par le moyen d'un seul ressort ; une

» main et une jambe de fer qui suppléaient à la main ou à » la jambe amputées et se mouvaient à volonté. » (*Histoire de l'École de la Flèche*, pages 164 et 165.)

» J'ajouterai ce qui suit aux détails précédents.

» Vous pourrez sans doute vous procurer à la Bibliothèque impériale les ouvrages de Jousse, et collationner les titres que je vous envoie. Nous possédons à notre bibliothèque tous ses ouvrages, excepté le *Secret de l'architecture* et la *Perspective positive*. Dans le privilége du roi qui accompagne ces ouvrages, vous verrez que Jousse est qualifié de *marchand et maître serrurier en notre ville de la Flèche*. En tous cas, c'était un serrurier précurseur de Vaucanson, et s'occupant au besoin de mécanique et d'architecture. Le titre d'ingénieur lui aurait mieux convenu, je crois.

» Il était très-probable, d'après ce qui précède, que Jousse avait dû mourir à la Flèche : j'ai été feuilleter ce matin les poudreux registres de la ville, et j'ai été assez heureux pour y découvrir l'acte d'inhumation de Mathurin Jousse. Je transcris *textuellement* ici cette pièce, avec son orthographe :

» *Le vingt et neuvième et dernier jour de février de l'année bissextile mil six cent septante et deux, a été inhumé au grand cimetière de la paroisse de la Flèche par moy vicaire de la paroisse, Maître Mathurin Jousse, marchand orfévre, âgé d'environ soixante ans, décédé d'hier au soir. Ont été présents à la sépulture Jonas Jousse et* (*) *Jousse ses enfans, tous de cette paroisse, lesquels ont signé avec nous :*

V. DE LA PLANCHE,
Prestre.

(Tiré du registre des baptêmes, mariages, et sépultures de la ville de la Flèche, du 1er janvier 1672 au 31 juillet 1673.)

(*) Il y a un blanc pour le prenom qui manque. Il y a aussi des blancs pour les deux signatures qui manquent

» Vous remarquerez que Jousse est qualifié d'orfévre dans cette pièce, et qu'il était dans sa soixante-cinquième année, quoiqu'on ne lui donne là que soixante ans. Il demeure donc acquis à la biographie que Mathurin Jousse est né à la Flèche le 27 août 1607 et y est mort à 65 ans le 28 février 1672.

» Vous savez du reste que la Flèche revendique encore, comme illustrations scientifiques, le fameux astronome Jean Picard, qui fonda en 1679 la *Connaissance des Temps*, et le célèbre physicien Sauveur, tous deux nés à la Flèche. Je ne cite pas Descartes, élevé seulement au collége.

» Il ne reste plus actuellement aucune personne du nom de Jousse à la Flèche : mais il y en a encore dans les environs. J'ignore si ce sont des descendants.

» Voilà, mon cher Monsieur Terquem, tout ce que je puis vous transmettre au sujet de Mathurin Jousse.

» La Flèche, 23 mars 1855.

ÉMILE COUPY,
Professeur. »

M. de la Gournerie, ingénieur des Ponts et Chaussées, professeur de géométrie descriptive à l'École Polytechnique, ayant été nommé professeur de la même science au Conservatoire des Arts et Métiers, y a prononcé un *Discours d'ouverture du cours* (*), le 14 novembre 1854. On y lit un historique très-instructif du *trait* stéréotomique, qui rappelle les travaux de Philibert de l'Orme et de Mathurin Jousse appréciés avec beaucoup de justice. On aurait désiré autant de justice à l'égard de Desargues, qui le premier a donné une base théorique aux procédés graphiques des praticiens. Dans la triste discussion que le célèbre géomètre eut à soutenir contre ces praticiens, il prétend ne reconnaître pour juges que les géomètres. M. de la Gournerie blâme cette prétention. Il me semble pourtant

(*) *Discours sur l'Art du trait et la Géométrie descriptive*. In-8, chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix : 1fr 25c.

très-naturel qu'un procès de *théorie* soit plaidé devant un tribunal de théoriciens. Si, par exemple, il s'élevait une discussion sur l'excellente *Théorie des Voûtes* que vient de publier M. Yvon Villarceau (*), il faudrait consulter ceux qui connaissent la dynamique des voûtes plutôt que ceux qui savent seulement le tracé et l'appareil des voûtes. On ne peut non plus approuver ce que le savant professeur dit de la belle invention de la méthode dite des *échelles* que Desargues a introduite dans la perspective, avant Lambert. Pour atténuer le mérite de ces procédés, M. de la Gournerie dit que Monge n'en a pas fait usage dans les épures destinées à l'École Polytechnique. Cette raison ne paraît pas suffisante; Monge n'a pas non plus employé la méthode des cotes, qui est pourtant d'un usage journalier et que le Mémoire de M. Noizet a rendue élémentaire (*Mémorial du Génie*, n° 6, 1823). Desargues était le précurseur de Frezier, le précurseur de Monge. Il ne lui a manqué qu'une qualité, la clarté; elle est essentielle pour se faire valoir: c'est souvent le seul mérite de la médiocrité. Voltaire dit que la limpidité des petits ruisseaux tient à ce qu'ils sont peu profonds.

Quant à la question de savoir si la géométrie descriptive est une méthode à découvertes ou non, elle est tout aussi importante que celle de savoir si la logique est une science ou un art. Faites des découvertes, on ne s'inquiétera pas de l'instrument.

ABEL.

Niels Henrik Abel (**) est né le 5 août 1802 à Findoë, sur la côte occidentale de Christiansandstifft, en Norvége.

(*) *Sur l'établissement des arches de pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité, et Tables pour faciliter les applications numériques.* In-8, avec figures dans le texte et 2 planches. Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix: 12 francs.

(**) Nicolas-Henri.

Son père Sörn Georg Abel était ministre protestant dans un village. En 1803, la famille fut transférée à Gierrestadt, paroisse voisine de Findoë. Abel reçut la première éducation de son père jusqu'en 1815, où il fréquenta l'école épiscopale de Christiania. Il ne se distingua pas dans ses études littéraires; mais en 1818 ses talents pour les mathématiques commencèrent à se développer subitement. M. Holmboë, professeur à cette école, lui donna des leçons particulières. Ayant passé rapidement les *Éléments*, on lui fit parcourir l'*Introduction* et les *Institutiones* d'Euler. Il étudia seul les ouvrages de Lacroix, Francœur, Poisson, Gauss et surtout ceux de Lagrange, et fit lui-même quelques essais. Sorti de l'école épiscopale, il entra à l'Université de Christiania. Son père étant mort, il reçut des leçons gratis, jouit d'une bourse et des secours des professeurs. Les deux années suivantes, il obtint une subvention du gouvernement. A cette époque, il composa plusieurs Mémoires insérés dans le *Magasin fur die Naturwissenschaften* (*Recueil d'Histoire naturelle*), journal qui paraît à Christiania. Le premier de ces Mémoires a été imprimé en 1820, sous le titre : *Allgemeine methode functionen einer variabeln grösse zu finden, wenn eine eigenschaft dieser functionen durch eine gleichung zwischen zwei variabeln ausgedruckt ist.* Méthode générale de trouver les fonctions d'une seule variable lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables.

Il s'occupa aussi de la résolution de l'équation du cinquième degré. Une fois, il crut l'avoir trouvée, mais ayant remarqué son erreur, il se proposa ou de la corriger, ou de démontrer l'impossibilité de la résolution générale des équations supérieures. Il réussit dans cette dernière tâche et fit imprimer sa démonstration en 1824, à Christiania, en français. S'étant extraordinairement distingué, le gouvernement, sur les recommandations de MM. les professeurs Ramusen et Hansteen, lui accorda des frais de voyage pour continuer pendant deux années ses études, en Allemagne, en Italie, en France. Il arriva à Berlin en 1825 et y resta six mois. M. Crelle dit que c'est à Abel qu'il doit l'idée de son journal. De Berlin, Abel se rendit par Vienne, Venise, Milan, Turin, à Paris, où il fit un séjour de dix mois, chez M. de Cotte, ancien principal de collége, alors maître de pension (*). Abel était accompagné de son camarade Moler, fils d'un riche propriétaire de mines en Norvége. M. de Cotte, géomètre bien capable d'apprécier Abel, m'a dit qu'il était d'un caractère doux, ouvert, communicatif, très-jovial et d'une extrême modestie. Son physique et sa tenue rappelaient une origine scandinave. Cette *tenue* n'a pas permis aux grands géomètres de Paris de deviner le génie d'Abel. En effet, comment soupçonner qu'un homme qui se présente en *casquette* puisse avoir du génie? En quittant Paris, il retourna à Berlin et de là à Christiania. Après une absence de vingt mois, il ne trouva pas d'abord un emploi convenable, et ce ne fut que peu de temps avant sa mort qu'il obtint des appointements fixes.

En décembre 1828, au fort de l'hiver, il entreprit un voyage pour les fonderies de fer de Froland, où se trouvait alors Mademoiselle Kremp, sa future, devenue depuis Mme Keilhan. Vers la mi-janvier, il y tomba malade et mourut de phthisie le 6 avril 1829, entouré des soins de sa future et de M. Smith, alors propriétaire de ces fonderies.

Le Ministre des Cultes et de l'Instruction publique de Prusse avait résolu de lui envoyer une invitation pour venir occuper une chaire à Berlin. M. Crelle, chargé de cette mission, en écrivit tout de suite à Abel; la Lettre arriva

(*) Rue Sainte-Marguerite-Saint-Germain, dans la maison où se trouve maintenant (1853) l'institution Gillet-Damiette peu de jours après sa mort. Il a été enterré près de l'église de Froland, où ses amis lui ont érigé un monument en fonte de fer. Il a laissé une mère, une sœur et plusieurs frères. C'est à sa famille qu'ont été adressés les 1500 francs, moitié d'un prix de 3000 francs que l'Institut a décerné à lui et à Jacobi conjointement en 1830; dans la Lettre d'Arago à Abel, du 24 juillet 1830, on dit que le prix sera proclamé dans la séance publique du 26 juillet 1830.

M. Holmboë, ancien professeur d'Abel, a publié :

Œuvres complètes de N. H. Abel, mathématicien, avec des *Notes et développements*, rédigées par ordre du roi par B. Holmboë, professeur de mathématiques à l'Université de Christiania, membre de la Société physiographique à Christiania et de l'Académie royale des Sciences de guerre à Stockholm.

Tome Ier, contenant les œuvres de l'auteur qui ont été publiées auparavant. Christiania, 1839; in-4, de 479 pages.

Tome II, contenant les œuvres de l'auteur qui n'ont pas été publiées auparavant. Christiania, 1839; in-4, de 294 pages.

Observation. On a omis dans cette édition un Mémoire d'Abel sur l'élimination, que l'on trouve dans le *Bulletin* de Ferussac.

Nous croyons utile de donner un résumé succinct des Mémoires contenus dans ces deux volumes.

JAMNITZER (Wentzel),

Médailleur, Opticien, Orfévre, Mathématicien.

Né à Nuremberg ou à Vienne vers 1508. Un manuscrit de Jean Neudorfer, mathématicien, qui fut son ami et, à ce qu'on croit, son parent par alliance, nous apprend que lui et son frère Albert firent venir leurs vieux parents de Vienne à Nuremberg. Les deux frères, tous deux artistes, ont travaillé ensemble. Nous avons parlé de son ouvrage de perspective (*Nouvelles Annales*, tome VIII, page 138). Une médaille de 1568, portant le portrait de Jamnitzer, existe à la Bibliothèque impériale (*Magasin pittoresque*, page 286; 1851). Il est mort à Nuremberg le 15 décembre 1586.

SUR LA MÉTHODE DES ÉQUIPOLLENCES;

PAR M. JUSTE BELLAVITIS.

L'étude des sciences mathématiques est tellement généralisée, qu'il doit arriver fréquemment qu'on reproduise des choses déjà publiées, et il serait injuste d'en tirer une accusation de plagiat, et même futile d'en réclamer la priorité; néanmoins je vous prie, Monsieur, de me permettre une observation sur une assertion qu'on trouve dans le cahier de décembre 1854 des *Nouvelles Annales*, tome XIII, page 464.

Dans les *Annales des Sciences*, pour le royaume lombardo-vénitien (tome VII, 1837), j'ai publié un long Mémoire sur la méthode géométrique que j'ai nommée *méthode des équipollences*. Dans le volume I^er (1843) des *Mémoires de l'I. R. Institut vénitien*, et dans des autres publications, j'ai donné plusieurs applications de cette méthode, lesquelles n'étaient que de simples déductions des principes déjà posés dans mon *Essai* publié à la fin de l'année 1835 (*Annales des Sciences*, tome V). Je ne sache pas que M. Saint-Venant ait traité des sommes géométriques avant l'année 1845 (*Comptes rendus* du 15 septembre, tome XXI, page 620), et je crois qu'il n'a pas donné à ces principes les extensions auxquelles j'étais parvenu dix ans auparavant. Il me semble donc très-inexact de dire que les idées de M. Saint-Venant et de

M. Cauchy ont été reproduites par moi sous le nom d'*équipollences*.

Permettez-moi aussi d'observer que les trois définitions suivantes sont tout à fait géométriques : 1° une droite est équipollente à une autre droite multipliée par un nombre donné quand elle est parallèle à cette droite, égale à la même multipliée par ce nombre, et prise dans la même direction; 2° une droite est équipollente à la somme de deux ou de plusieurs droites quand elle est équipollente au dernier côté d'un polygone, qui a les autres côtés équipollents à ces droites; 3° dans un plan on dira qu'une droite est équipollente au produit de deux droites divisées par une troisième quand sa longueur est égale à ce quotient, et son inclinaison est égale à la somme des inclinaisons des deux premières droites diminuées de l'inclinaison de la troisième. Les conséquences que j'ai déduites de ces définitions et des principes de géométrie élémentaire sont rigoureuses autant que les théorèmes d'Euclide.

S'il y a quelque chose de nébuleux, c'est, à mon avis, l'usage ordinaire de $\sqrt{-1}$, regardé comme quantité; et je crois que le vrai moyen d'interpréter les quantités imaginaires est de les considérer comme des *quantités géométriques*. Tandis qu'une équation entre quantités réelles *peut* être regardée comme une relation des distances entre un point pris pour origine et les points d'une droite, une équation entre quantités imaginaires *doit* être regardée comme une équipollence entre les distances des points d'un plan, comptées d'une origine donnée; les quantités réelles sont prises sur une droite fixe, et les coefficients de $\sqrt{-1}$ sont pris perpendiculairement à cette droite. C'est la représentation des quantités imaginaires proposée par plusieurs auteurs et qui m'a donné la première idée de ma méthode des équipollences; mais, au lieu de dire que les points d'un plan représentent des choses qui n'existent pas et qui sont impossibles, je dis que les binômes $a + b\sqrt{-1}$ représentent les points du plan : de cette manière, chaque question sur les quantités dites *imaginaires* a une véritable signification réelle, et l'Algèbre est, dans toutes ses parties, une science rigoureuse. La signification géométrique que j'adopte (et que je crois la seule possible) donne beaucoup de clarté aux questions algébriques, comme j'ai cherché à le faire voir dans un Essai sur l'Algèbre des imaginaires, dont la première partie a été publiée dans le tome IV (1852) des *Mémoires de l'Institut vénitien*. M. Cauchy, qui, à plusieurs reprises, a cherché à donner un sens précis au calcul des quantités imaginaires, a adopté dernièrement la même opinion supérieurement exposée.

La méthode des équipollences est tout à fait géométrique, et il est accidentel au sujet que, dans la statique, la résultante de deux forces soit équipollente à leur somme. La seule chose un peu nébuleuse dans ma méthode, mais qui est tout à fait accessoire, c'est la théorie des points fictifs, c'est-à-dire des points qui, à la manière déjà connue, représentent les intersections imaginaires d'une droite avec une courbe, lesquels points fictifs ont quelquefois des propriétés analogues à celles des intersections réelles.

Vous augmenterez, Monsieur, mes obligations, si vous avez la bonté de faire connaître, dans votre estimable journal, que, dans ma méthode des équipollences, je n'ai pas reproduit les idées de M. Saint-Venant.

BIBLIOGRAPHIE.

Lettre de Kepler a Nicolas Reimarus Ursus.

Nicolao Reimaro Urso Diethmarsa, mathematico Cæsareo nobilissimo.

Pragam.

Qui ignoti ad ignotas in longinquas regiones transmittunt epistolas, mirabiles sunt homines. Te mihi notum pridem fecit illustrissima tua gloria, qua mathematicos hujus ævi præcedis unus, quantum Phœbus orbis minuta sidera. Sed nec tempus plura fert, nec mathematicorum est garrulitas. Hoc unum habe, tanti a me fieri, quanti omnes docti te faciunt, quorum judicium aspernari arrogantis est, collaudari modesti juvenis. Cùm itaque, præceptore te, id est libris tuis, hoc quantulum est, cognitionis acquisiverim in mathematicis, æquum duxi ut te in re ardua, nec ut mihi videtur, contemnenda, consulam. Si approbaveris quod ago, beatum me prædicabo, proximum felicitatis gradum in eo statuo, ut a te corrigar : tanti est mihi tuum judicium. Hypotheses tuas amo. Sed Copernicum satis admirari non possum, cujus hypotheses hoc habent, quod his versibus complexus sum :

Quid mundus, quæ causa Deo ratioque creandi,
Unde Deo numeri, quæ tantæ regula moli,
Quid faciat sex circuitus, quo quælibet orbe
Intervalla cadant, cur tanto Jupiter et Mars
Orbibus haud primis interstinguantur hiatu,
Accipe Pythagoræ monstratum quinque figuris.

Nam inter Saturnum et Jovem est cubus, sic ut una Saturni periodus, sit orbis circumscriptus summa Jovi in-scriptus; inter Jovem et Martem tetraedron, inter Martem et Terram dodecaedron, inter Terram et Venerem icosaedron, inter Venerem et Mercurium octaedron. Ordinem hunc corporum nèque metaphysici, neque mathematici cum ratione immutaverunt. Jam et medii motus se accommodant, est enim eorum dupla ratio ad distantias, scilicet quia (vel eadem esset incitatio partium, in omnibus) propter majorem amplitudinem, quidem tardius redirent, et jam accedit debilitatio in exterioribus, qualis accidit in lucidi radii extenuatione. Parum utrique ac Copernico disceditur, plus tamen si ex motibus mediis constituentur distantiæ, quam si ex corporibus. Nam ex correctione distantiarum per corpora sequitur differentia prosthaphæresin, apogæorum non major, quam in Saturno 12^{m}, in Jove 25^{m}, in Marte $1^{gr},45^{m}$, in Venere 1^{gr}, in Mercurio 51^{m}. Plura non scribo, judicium tuum expectans, quod non gravaberis in gratiam nobilissimi juvenis D. Sigismundi Wagani, cujus instinctu scribo, hac vel proxima occasione ad nos transmittere. Vale, sideribus et nostræ scientiæ, decus Germaniæ.

Gratii, 15 Novemb., anno 1595.

Ex. tuæ discipulus M. Joanne Kepplerus, illustrium Styriæ provincialium mathematicus.

Né en 1571 (*), Kepler avait 24 ans, lorsqu'il écrivait cette Lettre. A cet âge, il était déjà en possession des idées suivantes:

1. Il admettait le système de Copernic, qui n'avait paru qu'en 1543.

2. Il rattachait le *nombre* des planètes au nombre des polyèdres réguliers. A cet effet, il imagine pour chaque planète une sphère d'un rayon égal à la distance moyenne

(*) Son lieu de naissance est Weil, près Stuttgardt. Beaucoup de familles israélites portent ce nom.

de la planète au Soleil; il inscrit certains polyèdres réguliers, dont les faces touchent une sphère dont le rayon représente la distance moyenne de la planète immédiatement inférieure, et il trouve la planète supérieure de la même manière. Ainsi, il circonscrit un dodécaèdre autour de la Terre : la sphère qui passe par les sommets est Mars; à cette dernière planète il circonscrit un tétraèdre : la sphère circonscrite à ce tétraèdre est Jupiter; il place de même Saturne, en circonscrivant un cube autour de Jupiter; ensuite il inscrit dans la Terre un icosaèdre : la sphère inscrite dans ce solide est Vénus; il inscrit dans Vénus un octaèdre : la sphère inscrite est Mercure.

Dans un ouvrage, publié en 1596, il motive ces divers solides par des considérations qui ne sont pas plus admissibles que l'objet même.

Tout cela est la partie poétique; mais voici des points d'une immense importance.

3. Kepler a une idée de l'attraction (*partium incitatio*), de l'action des masses (*corporum*); il compare la diminution de cette action (*debilitatio in exterioribus*) à l'affaiblissement des rayons lumineux (*in lucidi radii extenuatione*), et cet affaiblissement est en raison inverse des carrés des distances. Cette simple réflexion, si Kepler l'avait faite, lui donnait la loi newtonnienne.

4. Les racines carrées des moyens mouvements sont en raison inverse des distances au Soleil. Il donne la raison pourquoi les distances dépendent des moyens mouvements et non des masses.

Les provinces styriennes, étant catholiques, avaient adopté la réforme grégorienne et appelé Kepler à Gratz, en 1593, pour enseigner l'astronomie et faire des calendriers. Reimarus Ursus (en allemand, *Bär*), de Dithmar (Holstein), était un gardeur de porcs, qui apprit plusieurs langues et les mathématiques tout seul, et a composé beaucoup d'ouvrages; le plus célèbre est celui où il prétend que le système de Tycho de Brahé lui appartient, et accuse de plagiat et très-grossièrement l'illustre astronome qui, arrivé à Prague en 1596, où se trouvait alors Ursus, lui intenta un procès en calomnie. L'empereur institua une commission de juges; mais la mort d'Ursus, en 1599, mit fin à la procédure. Du reste, il n'est pas impossible qu'Ursus ne fût parvenu au même système que Tycho. Selon le dire de celui-ci, Kepler se disposait à écrire contre Ursus, qui avait inséré dans un de ses ouvrages la Lettre rapportée ci-dessus.

NOUVELLE ARITHMÉTIQUE APPLIQUÉE AU COMMERCE ET A LA MARINE, mise en vers par *L. Chavignaud*, ex-maître de pension, ancien professeur de Mathématiques à l'Institut Rollin, auteur de plusieurs ouvrages. 4e édition, revue et corrigée. Toulouse, imprimerie Delsol. In-8 de 92 pages; 1843 (*).

> Je plais en instruisant, et ma muse facile
> Répand sur la jeunesse une semence utile.

L'Épitre dédiée aux marins termine par ces trois vers :

> *Traduisant de Bourdon la docte Arithmétique,*
> *Je serai trop heureux, si mes utiles vers,*
> *En charmant vos instants, vous suivent sur les mers.*

L'auteur décrit, en effet, toutes les opérations de l'arithmétique Bourdon en vers techniques d'assez bonne facture. On est préparé d'avance à y trouver des *chevilles*

(*) Il y a une édition de Lyon, 1846, éditée par la veuve (chez Mallet-Bachelier, libraire).

en abondance. L'auteur débute ainsi :

Définitions.

L'utile Arithmétique, en ses peintures sombres,
Nous fait connaître à fond la science des nombres,
Dans ses divers rapports les fait envisager,
Assembler, retrancher, composer, partager,
Donne des moyens sûrs à l'homme qui s'exerce,
Et grave en son esprit les règles du commerce.

Les opérations sont en général bien indiquées pour ceux qui les connaissent, et ces vers peuvent servir à certaines intelligences pour les retenir.

Voici le début de la règle d'escompte :

Lorsque le créancier veut faire une remise,
Le débiteur alors, et la loi l'autorise,
En retranche l'escompte au susdit commerçant,
Qui change son billet pour de l'argent comptant.

Cela suffit pour donner une idée de l'ouvrage. On a omis les extractions des racines.

Un Anglais nommé Guillaume Buckley a publié une *Arithmetica memorativa* en vers latins. Wallis a acheté cet ouvrage qui était joint à la *Logique* de Seton, publiée à Cambridge en 1631. Il ignore si l'*Arithmétique* est antérieure ou non à la *Logique* (Wallis, *Opera,* t. II, p. 38). On y trouve le plus ancien exemple connu de l'extraction approchée de la racine carrée, au moyen des décimales, en ces quatre vers hexamètres :

Quadrato numero, senas præfigito cyphras :
Producti quadri radix per mille secetur,
Integra dat quotiens; et pars ita recta manebit
Radici ut veræ ne pars millisima desit (subintellige *unius*).

Heilbronner écrit erronément Guillielmus Budæus (*Hist. matheseos,* p. 783). Il était de Lichtfeld et trèsaimé d'Édouard VI. Mort vers 1550, il était contemporain du célèbre Robert Record.

Leslie, dans sa *Philosophy of arithmetic* (p. 237), donne les extraits suivants de cette Arithmétique.

De numeratione.

. . . Numerorum signa decem sunt
Quorum significant aliquid per se omnia, præter
Postremum, nihili quæ dicitur esse figura.
Circulus hæc alias, alias quoque cyphra vocatur,
Quæ supplere locum nota est non significare.
Hi characteres, prima si sede locentur,
Significant se simpliciter, positique secunda
Significant decies se; quod si tertius illis
Obtigerit locus, ad centum se porrigit usque
Summa; locus quartus solus tibi millia fundit,
Et quartum quintus decies complectitur, huncque
Tantumdem sextus superat. Quid multa? sequens cum
Quisque locus soleat decies augere priorem.

Ratio numeris tum scribendi tum exprimendi.

Scripturis numerum a dextris fac incipias, hinc
In lævam tendens, donec conscripseris omnes,
Post signa minimis loca quarternaria punctis
Punctaque quot fuerint, totidem tibi millia monstrant.
A læva vero numerorum expressio fiat.

Pour la division, il indique cette disposition :

Au-dessous du diviseur, on tire deux traits laissant entre eux un certain intervalle, pour écrire les chiffres successifs du quotient; on écrit le diviseur au-dessous du dernier trait et vers l'extrémité gauche; on cherche le quotient qu'on met à la place indiquée; on fait le produit et l'on écrit le résidu au-dessus du diviseur; on barre la partie du dividende employée; ensuite on fait avancer le diviseur vers la droite, et ainsi de suite. Il résume ces diverses opérations dans un seul vers :

Divide, multiplica, subduc, transferque secantem.

Voici la preuve :

Per divisorem, quotientem multiplicabis;
Producto reliquum, si quod fuit, adde priorque
Exhibet numerus, nisi te deceperit error.

Le titre de l'ouvrage est : ARITHMETICA MEMORATIVA, *sive* COMPENDIARIA ARITHMETICÆ TRACTATIO, *non solum tironibus, sed etiam veteranis et bene exercitatis in ea arte viris, memoriæ juvandæ gratia, admodum necessaria, authore Gulielmo Budæo, Cantabriensi.*

Neper, dans sa *Rabdologie,* a inséré des vers mnémoniques pour expliquer l'emploi de ses baguettes.

On sait que le *Lilavati,* qui remonte au XII^e siècle de notre ère, est écrit en vers sanscrits mnémoniques.

CHAVIGNAUD (Pierre-Léon), né à Saintes (Charente-Inférieure), en 1791, fils d'un négociant honorable, s'appliqua de bonne heure aux mathématiques et se destinait à la marine de guerre, dont un de ses oncles, Clavier, lieutenant de vaisseau, devait lui faciliter l'entrée, alors assez difficile. La rentrée des Bourbons mit obstacle à ses projets. Dès lors se livrant à l'enseignement des mathématiques et des langues étrangères, il professa les mathématiques dans un des colléges royaux de la capitale et donna des leçons d'anglais et d'allemand. Depuis, il obtint la chaire de mathématiques de Châteauroux, et, en 1820, vint se fixer à Saintes, sa ville natale. Chargé de l'organisation des écoles primaires et supérieures de l'arrondissement, il dirigea l'école d'enseignement mutuel de la ville de Saintes. C'est alors qu'il fit paraître la première édition de sa *Méthode de lecture,* imprimée, en 1823, chez

Hus (Alexandre), et ensuite, en 1824, son *Histoire de France* en vers lyriques, et un an plus tard sa *Grammaire* en vers alexandrins, in-12 de 150 pages, imprimée à Nantes en 1825 par M. Laforest. Ayant fait usage de ces deux ouvrages dans son école d'enseignement mutuel, il en obtint les meilleurs résultats, malgré les critiques qui ne lui manquèrent pas ainsi qu'à tous les novateurs. D'après ce succès il s'occupa de son *Arithmétique en vers*, œuvre à laquelle il s'attacha plus spécialement et qui était son œuvre de prédilection. Il s'attacha à mettre toute la clarté possible dans les définitions et à éviter toute redondance et toute superfluité. Cet ouvrage est le plus parfait en ce genre comme facilité de vers et rectitude d'impression. Les définitions, quoique en vers, ont beaucoup de clarté et de précision. La première édition parut en 1830, à Cognac, imprimerie Fournier. En 1830, il mit la Charte en vers et fit des développements en vers sur le *Pater*, l'*Ave* et le *Credo*, publiés par les soins du fils de l'auteur, à Nantes, en 1840. Dix éditions successives se sont écoulées de la *Grammaire* et de l'*Arithmétique en vers*, par les soins du fils et de la veuve de l'auteur, et bien des personnes ont réappris, à l'aide de ces deux ouvrages, les éléments de la grammaire et de l'arithmétique.

L'auteur ne se faisait point un jeu d'esprit en mettant en vers des choses aussi arides: son désir était de se rendre utile en rendant faciles, par la mnémotechnie, les principes de Lhomond et de Bezout, et en répandant quelques fleurs sur un chemin aride et épineux. Sur les dernières années de sa vie, il devint imprimeur et créa l'*Abeille saintongeoise*. Il mourut en 1837.

(*Communiqué* par M. CHAVIGNAUD fils.)

CHRISTOPHE RUDOLF.

Le plus ancien ouvrage d'algèbre en Allemagne est celui de Christophe Rudolf de Jauer (*), et a paru en 1524. Je n'ai vu nulle part la description de cette première édition. En 1552, l'ouvrage était déjà si rare, que le prix avait quadruplé. C'est ce qui engagea Michel Stiffel à en donner une nouvelle édition (*) sous ce titre : *Die cosz Christorfs Rudolfs mit schönen Exemplen der cosz, durch Michael Stiffel, gebessert und sehr gemehrt*, 1571; in-4 de 491 pages : La cosz de Christophe Rudolf avec de beaux exemples de la cosz, améliorée et très-augmentée par Michael Stiffel.

Le titre porte 1571; mais à la fin de l'ouvrage on lit : *Gedruckt zu Königsperg in Preussen, durch Alexandrum Behm von Luthomissel; vollendet am dritten Tag des herbstmonats als man zalt nach der geburt Unsers Lieben Herren Jesu Christi* 1554 : Imprimé à Konigsberg, en Prusse, par Alexandre Behm, de Luthomissel, fini le troisième jour du mois d'automne, lorsqu'on compte 1554 après la naissance de Notre Cher Seigneur Jésus-Christ.

Ainsi, l'ouvrage a été publié dix-sept ans après l'impression. Voici comment Stiffel raconte ce qui lui a fait entreprendre cet ouvrage : « Après l'apparition de la cosz » de Rudolf, plusieurs maîtres de calcul (*rechenmeister*) » allemands s'occupèrent de l'*algebra numerosa*, et con- » trairement à la charité chrétienne, en injuriant et

(*) Près de Liegnitz, en Silesie, province qui, au XVI^e siècle, appartenait à l'Empereur, comme roi de Bohème.

(**) Murhard indique une édition de 1626 et de Nuremberg 1661.

» maudissant l'auteur, parce qu'il avait donné ses règles » sans y joindre aucune démonstration. Cependant, » comme dit Salomon, *le fou dit tout ce qu'il fait, » et le sage se retient* (Prov.), et d'ailleurs voulant » faire un bon livre, il lui était loisible d'y mettre ce » qu'il voulait (*). »

A la fin de l'impression de cette nouvelle édition, Stiffel reçut de Jean Neudorffer, maître de calcul à Nuremberg, un autographe de Rudolf, contenant les démonstrations de ses théorèmes par des figures de géométrie. Stiffel ajouta ces figures à cette nouvelle édition, en avertissant qu'elles appartenaient à Rudolf, et cela pour écarter les soupçons qu'on avait répandus, que Rudolf ne comprenait rien à ses règles, et qu'il les avait tirées d'un manuscrit de la Bibliothèque de Vienne. Du reste, ces figures *montrent*, mais ne démontrent pas.

Rudolf débute ainsi : « Ce livre est partagé en deux » parties : la première renferme huit algorithmes et au» tres préliminaires, nécessaires pour expliquer la cosz; » l'autre partie donne les règles de la cosz, chacune ex» pliquée à part, au moyen de nombreux et de beaux » exemples. »

PREMIÈRE PARTIE.

« La première Partie de ce livre est subdivisée en douze » chapitres : le *Chapitre Ier* traite de l'algorithme ordi» naire des nombres entiers; apprend à numérer, ajou» ter, soustraire, multiplier, diviser, progresser. »

Voici comme il énonce le nombre 24375634567 :

Vingt-quatre fois mille mille mille trois cents fois mille mille soixante-quinze fois mille mille six cent mille

(*) Rudolf est pour l'Allemagne ce qu'est pour l'Italie Fibonacci, dont nous parlerons à l'occasion d'un manuscrit précieux qui vient d'être découvert et publié par le savant prince de Boncompagni.

trente--quatre mille cinq cent soixante-sept. Les mots *million*, *billion* ont été introduits plus tard par les Italiens, et on les trouve déjà chez Albert Girard (mort vers 1633).

Il donne dans ce chapitre les règles pour la progression arithmétique et géométrique. Stiffel ajoute les nombres parfaits, trigonaux, et les progressions qui donnent les côtés rationnels des triangles rectangles.

Chapitre II. « De l'algorithme ordinaire des fractions, » enseigne brièvement à écrire, à énoncer, sommer, soustraire, multiplier, diviser les fractions. »

Chapitre III. « Enseigne la règle *detri* en nombres » entiers et rompus : Donne la dernière place à l'objet » en question, pose à la première place ce qui a même » nom que l'objet en question, et met l'autre objet au » milieu; ensuite multiplie le moyen nombre avec le der- » nier et divise par le premier, et tu as dans le quotient » ce que coûte le troisième nombre. »

Il termine par cette règle *detri* inverse : « Multiplie » le moyen nombre par le premier et divise par le troi- » sième, et tu as réponse à la question. »

Chapitre IV. « Enseigne à extraire des racines : cela » veut dire extraire des racines en carrés et cubes. »

Mêmes procédés qu'aujourd'hui : il donne les racines des nombres irrationnels à une unité près, et pas d'approximations ultérieures.

Chapitre V. « De l'algorithme de la cosz, en latin : *De* » *additis et diminutis integrorum* : cela veut dire des » nombres ajoutés et retranchés. L'addition est marquée » par le signe + : cela signifie *plus*. La soustraction par » le signe — : cela signifie *minus*. »

C'est la première apparition de ces signes.

Numérer. « Les anciens, nos prédécesseurs, après une

» application sérieuse ont inventé la *cosz* : cela veut dire
» le calcul d'une chose et le compte des nombres d'après
» l'ordre naturel..., et ont aussi désigné, pour abréger,
» par des signes tirés du commencement du mot ou du
» nom de cette manière. »

Ici Rudolf donne dix signes en caractères gothiques que, pour éviter les embarras typographiques, nous remplaçons par les lettres ordinaires :

d	*dragma*	correspond à	$x^0 = 1$,
r	*racine*	—	x^1,
c	*census*	—	x^2,
C	*cubus*	—	x^3,
cc	*census deccus*	—	x^4,
sc	*sursolidum*	—	x^5,
cC	*censicubus*	—	x^6,
BcC	*Bsursolidum*	—	x^7,
ccc	*censceus deceus*	—	x^8,
CC	*cubus de cubo*	—	x^9.

Il enseigne ensuite la règle des signes pour les quatre opérations comme aujourd'hui.

Exemple : A multiplier $6r + 8d$ par $5r - 7d$. Il trouve pour produit

$$30c - 2r - 56d;$$

car rr est c et dd reste d

$$\frac{5C}{7cc} = \frac{5d}{7r}.$$

Chapitre VI. Calculs des fractions cossiques.

Chapitre VII. Algorithme *de surdis quadratorum*.

Rudolf distingue trois sortes d'irrationnelles quadratiques et se sert du signe actuel $\sqrt{}$.

Exemple :

1°. Rationnelles : $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b.$

2°. Communicant : $\sqrt{a^2 c} + \sqrt{b^2 c} = (a + b)\sqrt{c}.$

3°. Non-communicant : $\sqrt{a} + \sqrt{b}.$

L'addition et la soustraction sont fondées sur ces formules :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + \sqrt{4ab}}; \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{a + b - 4\sqrt{ab}}.$$

Chapitre VIII. Algorithme nommé en latin *de surdis cubicorum.*

On désigne la racine cubique par ce signe $\surd\surd\surd$.

On y trouve la formule

$$\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{m + n + 3\sqrt[3]{m^2 n} + 3\sqrt[3]{mn^2}}.$$

Chapitre IX. Algorithme nommé en latin *de surdis quadratorum de quadratis.*

La racine quatrième est représentée par $\surd\surd$. Exemples des quatre opérations.

Chapitre X. Algorithme nommé en latin *de binomiis et residuis.*

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est un binôme et $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est un résidu ; il enseigne les quatre opérations sur les binômes et les résidus.

Exemple :

$$\frac{16 + \sqrt{64}}{10 - \sqrt{4}} = \frac{(16 + \sqrt{64})(10 + \sqrt{4})}{(10 - \sqrt{4})(10 + \sqrt{4})}$$

$$= \frac{176 + \sqrt{12544}}{96} = 1\frac{5}{6} + \sqrt{1\frac{13}{36}} = 3.$$

Chapitre XI. Extraction des racines carrées des nombres binômes et des nombres résidus. Énoncé de la même règle qu'on trouve dans l'*Arithmétique universelle* de Newton et sans démonstration ; ainsi

$$\sqrt{7 + \sqrt{48}} = 2 + \sqrt{3}\ .$$

Chapitre XII. Les cinq espèces de nombres proportionnés.

1°. *Multiplex* $\frac{mn}{n}$; ainsi

$\frac{2n}{n}$ *proportio dupla,*

$\frac{3n}{n}$ — *tripla,*

$\frac{n}{2n}$ — *subdupla,*

$\frac{n}{3n}$ — *subtripla.*

2°. *Superparticularis* $\frac{n+1}{n}$:

$\frac{3}{2}$ *sesquialtera,* $\frac{4}{3}$ *sesquitertia,* $\frac{5}{4}$ *sesquiquarta.*

3°. *Superpartiens* $\frac{n+p}{n}$ où $p < n$ et > 1:

$\frac{5}{3}$ *superpartiens tertias,* $\frac{7}{4}$ *superpartiens quartas.*

4°. *Multiplex superparticularis* $\frac{mn+1}{n}$:

$\frac{5}{2} = \frac{2.2+1}{2} =$ *dupla superpartiens tertias,*

$\frac{17}{4} = \frac{4.4+1}{4} =$ *quadrupla sesquiquarta,*

$\frac{31}{6} = \frac{6.5+1}{6} =$ *quintupla sesquisexta.*

5°. *Multiplex superpartiens* $\frac{mn+p}{n}$, $p < n$ et > 1:

$\frac{8}{3} = \frac{2.2+2}{3} =$ *dupla superbipartiens tertia,*

$\frac{18}{5} = \frac{3.5+3}{5} =$ *tripla supertripartiens quinta.*

Ces dénominations, soit dit en passant, prouvent d'une manière irréfragable que les Grecs, qui s'en sont servis, n'avaient aucune idée d'une numération chiffrée.

Lorsque deux quantités sont égales, il y a *proportio æqualitatis;* pour deux quantités inégales, il y a *proportio inæqualitatis* et *majoris,* par exemple, pour $\frac{3}{2}$ et *minoris* pour $\frac{2}{3}$.

On voit que *proportio* est pris pour rapport chez les écrivains du moyen âge. Rudolf renvoie pour plus de détails à Boëce.

SECONDE PARTIE.

La seconde Partie est divisée en trois *différences* (*).

Première différence.

La première différence contient les huit règles de la *cosz.*

Rudolf dit que « les anciens l'ont nommée *l'art des*
» *choses, parce qu'à son aide on peut résoudre les secrets*
» *des questions sur les choses, savoir sur les nombres et*
» *les mesures.*
» Dans chaque question, on se servait de la formule:
» *Ponatur una res.* Les règles de solution ont été nommées
» en italien *regule de la cosse,* une *cossa* signifie une
» chose. »

L'ordre naturel des quantités est d, r, c, C, cc, etc., (voir ci-dessus). r est dit plus grand que d, c plus grand que r, et ainsi de suite.

1[re] *équation.* Deux quantités qui se suivent dans l'ordre naturel deviennent égales.

Exemples:

$3r$ égal	$6d$	fac.	. r. 2.
$4c$ égal	$8r$		—
5C égal	$10c$		—

(*) Dénomination empruntée aux Arabes. L'expression *Ponatur una res* est l'origine des nombres *positifs.*

cela revient à

$$3x = 6, \quad 4x^2 = 8x, \quad 5x^3 = 10x^2,$$

d'où

$$x = 2.$$

Rudolf ne connaît pas le signe $=$, il se sert du point. Ainsi $r.2$ cela veut dire $x = 2$; il choisit tous ses exemples de manière que l'on ait $x = 2$. Il démontre la règle par une figure de géométrie : c'est un rectangle partagé en cinq rectangles égaux.

Nous écrirons les équations suivantes d'après la manière actuelle.

2e *équation*. Deux quantités sont égales entre lesquelles une quantité naturelle est supprimée. Nous écrirons :

Exemple :

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 &= 8x^0, \\ 3x^3 &= 12x, \end{aligned}\right\} x = 2.$$

3e *équation*. *Exemple :*

$$\left.\begin{aligned} 2x^3 &= 16x^0, \\ 3x^4 &= 4x, \end{aligned}\right\} x = 2$$

4e *équation*. *Exemple :*

$$\left.\begin{aligned} 2x^4 &= 32x^0, \\ 3x^5 &= 48x, \end{aligned}\right\} x = 2.$$

5e *équation*. *Exemple :*

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 4x &= 20x^0, \\ 5x^3 + 6x^2 &= 32x, \end{aligned}\right\} x = 2.$$

Rudolf donne la règle ordinaire pour la résolution de l'équation du second degré.

La figure se rapporte à l'équation

$$x^2 + 8x = 240;$$

on a

$$240 = 144 + 96, \quad 96 = 2.48 = 4.12 + 4.12;$$

il construit les deux rectangles 4.12 et le carré 12.12.

Ces trois rectangles ayant pour hauteur commune 12 sont réunis dans un seul rectangle ayant pour hauteur 12 et pour hauteur 20, et dont l'aire est 240 ; ainsi l'équation se trouve vérifiée. Il en est ainsi pour toutes les autres figures ; elles ne *démontrent* pas les solutions, mais les vérifient.

6ᵉ *équation. Exemple :*

$$\left.\begin{array}{l} 4x^2 + 8x^0 = 12x, \\ 3x^3 + 9x = 14\tfrac{1}{2}x, \\ 3x^2 + 30x^0 = 19x, \\ 2x^3 + 31x = 21\tfrac{1}{2}x, \end{array}\right\} x = 2.$$

La figure vérifie l'équation

$$x^2 + 96 = 20x, \quad x = 12.$$

Stiffel dit que Rudolf a d'abord donné un énoncé faux, mais qu'il a rectifié dans un opuscule qu'il a publié postérieurement. Quel est cet opuscule ?

7ᵉ *équation. Exemple :*

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 12x^0 = 5x^2 \\ 5x^2 + 14x = 6x^3 \end{array}\right\} x = 2.$$

La figure vérifie l'équation

$$x^2 = 8x - 240, \quad x = 20.$$

Rudolf donne à la valeur 20 le nom *racine vraie :* c'est qu'il regarde la seconde racine $x = -12$ comme *fausse.*

8ᵉ *équation. Exemple :*

$$\begin{array}{r} 24x^4 + 5x^2 = 52, \\ 3x^5 + 6x^3 = 72x, \\ x^6 + 3x^3 = 88, \\ 2x^7 + 4x^5 = 160x, \\ 2x^8 + 8x^4 = 640, \\ 3x^9 + 10x^5 = 928x. \end{array}$$

Cette classification des équations quadratiques est évidemment d'origine arabe (*voir* Alkhâgâmi de Wœpcke, *Nouvelles Annales*, tome IX, page 389, et tome XIII, page 148). L'Arabe introduit souvent l'unité comme facteur pour rétablir l'homogénéité géométrique, et par imitation Rudolf a un signe particulier pour représenter l'unité.

Deuxième différence. (Cautèles.)

On avait donné jusqu'à Rudolf vingt-quatre espèces d'équations du second degré. Alkhâgâmi en donna même vingt-cinq (*Nouvelles Annales*, tome IX, page 389). Rudolf enseigne ici les moyens (cautèles) de réduire ces vingt-quatre espèces aux huit qu'il a indiquées. Il donne quatre règles pour opérer cette réduction : les deux premières règles apprennent à transporter un terme d'un membre dans un autre par le changement de signe; la troisième règle apprend à faire disparaître les radicaux par l'élévation à des puissances; la quatrième enseigne à faire disparaître les dénominateurs.

Troisième différence. (Énigmes.)

Cette troisième et dernière Partie ne porte aucun titre, et contient quatre cent trente-trois problèmes (*ænigmata*) pour l'application des huit règles cossiques. Il y a des questions numériques pour la spéculation et d'autres pour la pratique.

Et à la fin il y a huit problèmes qui ne peuvent se résoudre par ces huit règles cossiques, parce qu'elles mènent à des équations du troisième degré. Stiffel pense que par là Rudolf voulait dire : « Vois, mon cher lecteur, j'ai traité dans ce mien livre seulement de la cosz quadratique; eh bien, il y a encore la cosz cubique dont je ne t'ai rien dit; puisses-tu apprendre, à cause de cela, la cosz cubique : dans cette louable intention, je te montre ce cube. » En effet, l'ouvrage de Rudolf est terminé par la représentation d'un cube, divisé de manière à figurer les quatre termes du développement de $(3 + \sqrt{2})^3$.

Nous avons tiré ce qui précède des scolies que M. A. Drechsler, professeur, a publiées en 1851 sous ce titre : *Scholien zu Christoph Rudolfs Cosz*. Dresde ; in-8 de 47 p.

Kästner donne des renseignements fort curieux sur l'ouvrage de Stiffel [*Histoire des Mathématiques*, tome I, page 174 (*)]. Stiffel dédie son ouvrage à Christophe Ottendorffer, honorable bourgeois de Kœnigsberg (Prusse), et dans un appendice il lui raconte cette histoire de sa vie. Moine Augustin à Esslingen, il avait appris dans les livres de Luther que la vie monastique était une abomination devant Dieu, mais ne savait pas comment il pourrait subvenir à ses besoins hors de son couvent. Cela pesait lourdement sur sa conscience, surtout à cause des messes journalières. En 1520, ayant lu dans l'Apocalypse : *Timidis autem et incredulis... pars illorum erit in stagno ardenti, igne et sulphure* (XXI, 8), il ne pouvait plus ni dormir dans son lit ni veiller à matines, et lorsqu'il voyait les autres moines être gais, il déplorait de ne pouvoir être de même humeur. Enfin, lorsque, étant de nouveau dans la bibliothèque du couvent, il lut le chapitre XIII de l'Apocalypse, l'idée lui vint que la *bête* apocalyptique désignait le pape Léon X. Méditant sur le nombre apocalyptique 666, il pensait : Mon Dieu, quelle consolation, si l'on avait quelque calcul certain. Il trouvait bien, dans LEO DECIMVS, M.D.C.L.V.I, mais la lettre M était de trop, et il manquait la lettre X

(*) La première édition est de 1554 et la seconde de 1571 ; il y a une édition de 1615, imprimée à Amsterdam chez W. Janson. On dit qu'il existe une édition en hollandais de la même année 1615, imprimée aussi à Amsterdam.

pour faire 666. Or le nom peut s'écrire LEO X, et la lettre M peut signifier *mystérieux;* ayant fait cette découverte, il rentra dans sa cellule, se mit à genoux, remercia Dieu de cette consolation, et reprit courage. Ayant quitté le couvent et devenu prédicateur de la cour à Mansfeld, il montra ses calculs à Martin Luther, qui lui conseilla d'abandonner ces spéculations, qui n'avaient rien de certain. Toutefois, en 1532, menant une vie oisive, il poussa l'indiscrétion jusqu'à publier un opuscule, où, interprétant les paroles de Daniel, il fixait l'heure et le jour de la fin du monde en octobre 1533. Quand on lui objectait les paroles du Christ : *De die autem illo vel horâ nemo scit* (Marc, XIII, 32), il répondait que Jésus, comme homme, le savait pourtant; mais il avoue s'être trompé, confesse son erreur devant Dieu et les hommes, se repent de n'avoir pas écouté les conseils de son cher Luther, et devint si ennemi des calculs (bien entendu prophétiques), que, pendant quatorze années, il n'aimait pas d'en entendre parler (*) ; il eut pourtant une rechute (*Nouvelles Annales,* t. XIII, p. 267).

Nous signalons ces aberrations mentales, parce qu'elles sont instructives. La psychologie ne sera établie sur des fondements stables que lorsqu'on aura bien étudié les anomalies de l'esprit humain, et les influences indestructibles des idées telles qu'elles sont inoculées dans la molle cervelle des enfants. Les désordres tératologiques des formes et des fonctions répandent un grand jour sur la structure et la vie normales des êtres organisés.

Note. Aux manuscrits de la Bibliothèque impériale (365, m. 4), il existe une traduction latine de l'ouvrage de Christophe Rudolf sous ce titre : *Arithmetica Christo-*

(*) Pleins de confiance dans cette prophétie, les paysans de sa cure se mirent à faire bombance et à dissiper tous leurs biens; trompés dans leur attente, ils voulurent tuer Stiffel, qui ne dut son salut qu'à l'intervention de Luther.

phori Rudolfi ab Jauer e germanica lingua in latinam a Christophoro Auvero, Petri Danesii mandato, Romæ, anno Christi 1540, *conversa.*

BIBLIOGRAPHIE.

A TREATISE ON THE CALCULUS OF OPERATIONS, DESIGNED TO FACILITATE THE PROCESSES OF THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS AND THE CALCULUS OF FINITE DIFFERENCES; by the Rev. *Robert Carmichael*, A. M. fellow of Trinity college, member of the royal irish Academy, and sometime examiner in mathematics in the Queen's University in Ireland. London, Longman, Brown, Green, and Longmans. In-8 de XII-170 pages; 1855. — Traité du calcul des opérations, destiné à faciliter les procédés du calcul différentiel et intégral et du calcul aux différences finies.

Dans toute opération analytique, on peut distinguer trois parties: 1° le signe qui indique l'opération à faire; 2° la quantité sur laquelle on opère, autrement le sujet de l'opération; 3° le résultat. Ainsi dans $\sqrt{4}$, le signe est $\sqrt{\ }$, le sujet est 4, le résultat est 2. Dans $d.x^2$, le signe est la lettre d, le sujet est x^2 et le résultat $2xdx$. On peut faire abstraction des deux dernières parties et ne raisonner que sur les signes indicateurs. Alors on parvient à des théorèmes très-instructifs, de nature philosophique et dont l'ensemble constitue ce que les Anglais nomment le *calcul des opérations*, et qu'ils cultivent beaucoup depuis quelques années. Donnons un exemple. Dans l'algèbre ordinaire, on a

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\ }} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\ }} = \sqrt[mn]{\ }.$$

c'est un théorème de calcul opératoire. Dans l'analyse infinitésimale,

$$d^m . d^n = d^n . d^m = d^{m+n}, \quad ds = sd$$

sont d'autres théorèmes de ce genre. Le germe de cette doctrine est dans la relation indiquée par Leibnitz entre les exposants des puissances et les exposants différentiels. Mais le premier fondateur est Arbogast. On lit dans son *Calcul dedérivation* (1800) : « Ici nous allons présenter » la chose sous un autre aspect. Nous allons *détacher* des » dérivées leur *échelle de dérivation* (p. 308). » C'est ce qu'on appelle la méthode des *échelles détachées* (*). Mais Arbogast ne considère que les *différences* et les *différentiels*, et ses notations sont disgracieuses. Le second et véritable fondateur du calcul des opérations est Servois (*Annales de Gergonne*, t. V, p. 93 ; 1814). Le premier il a considéré la question sous un point de vue général, l'a placée sur un terrain philosophique et a *inventé* les théorèmes fondamentaux qui découlent de cette position ; théorèmes que des géomètres anglais ont *réinventés* dans ces derniers temps.

Le révérend Carmichael cite ces géomètres : ce sont Hargreave, Boole, Bownin, Doukin, Graves, Murphy, Spotiswoodes, Sylvester, mais jamais Servois. La raison en est toute simple. Le savant auteur trouve qu'il est aussi superflu de dire que toute cette théorie est due à Servois, que de dire que la quadrature de la parabole appartient à Archimède. Cette explication admise, nous pouvons passer à l'analyse de cette production remarquable, qui réunit en un faisceau une foule de faits épars dans diverses collections, et imprime aux méthodes d'intégration une uniformité qui manque complétement dans les traités ordinaires.

(*) Cette idée se rencontre déjà chez Lorgna.

1. *Notation.* $\varphi.u$. Le point ne désigne ni une multiplication, ni que l'on a une fonction de u, mais il indique qu'il faut faire sur le sujet une certaine opération désignée par φ. Soit X le résultat de cette opération, de sorte que

$$\varphi.u = X,$$

alors

$$\varphi^{-1}.X = u;$$

φ^{-1} indique l'opération φ qu'il faut faire sur X pour reproduire u. On écrit aussi symboliquement

$$\frac{X}{\varphi} = u;$$

φ^{-1} se nomme *indice opératoire inverse.*

$$\sin^{-1} x = \text{arc sin} = x,$$
$$\log^{-1} x = \text{nomb. dont le log.} = x;$$

$\varphi_n \varphi_{n-1} \varphi_{n-2} \ldots \varphi_2 \varphi_1 . u$ indique n opérations à faire sur n.

On fait d'abord l'opération φ_1, sur ce premier résultat l'opération φ_2, sur ce second résultat l'opération φ_3, etc.

Si toutes ces opérations sont identiques, on écrit $\varphi^n . u$; n est un exposant opératoire, et

$$\varphi^n \varphi^{-n} . u = u = \varphi^0 . u.$$

Cette équation définit l'indice opératoire négatif. D'ailleurs $\varphi^0 . u$ indique qu'il ne faut faire aucune opération sur u, et, par conséquent, laisser la quantité telle qu'elle est.

$$a_1 \varphi_1 \; u + a_2 \varphi_2 . u + \ldots + a_n \varphi_n . u$$

s'écrit symboliquement

$$(a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \ldots + a_n \varphi_n) . u.$$

F$(\varphi) . u$ signifie qu'il faut développer la fonction F(φ) et ensuite ajouter le sujet u.

Exemple :

$$(a+\varphi)^m.u = a^m u + ma^{m-1}\varphi.u + m\cdot\frac{m-1}{m-2}a^{m-2}\varphi^2.u + \ldots$$
$$= \left(a^m + ma^{m-1}\varphi + m\cdot\frac{m-1}{2}a^{2m-2}\varphi^2 + \ldots\right).u,$$
$$e^\varphi.u = \left(1+\varphi+\frac{\varphi^2}{1.2}+\frac{\varphi^3}{1.2.3}+\ldots\right).u.$$

Si φ désigne une dérivation, on a

$$e^{\mathrm{D}}.u = u + \mathrm{D}.u + \frac{\mathrm{D}^2.u}{1.2} + \frac{\mathrm{D}^3.u}{1.2.3} + \ldots$$
$$= \left(1 + \mathrm{D} + \frac{\mathrm{D}^2}{1.2} + \frac{\mathrm{D}^3}{1.2.3} + \ldots\right).u.$$

Chapitre II. — *Principes élémentaires.*

1. *Loi commutative.* Lorsqu'on a

$$\varphi_1\varphi_2.u = \varphi_2\varphi_1\ u,$$

les deux symboles opératoires φ_1, φ_2, sont dits être soumis à la *loi commutative.*

Les nombres sont soumis à cette loi. En effet, un nombre est une opération sur l'unité (Euclide, livre VII, définition 2), de sorte que le nombre n peut s'écrire $n.1$, où l'unité est le sujet, et la multiplication par m est désignée par $mn.1$ (Euclide, liv. VII, déf. 15); on a

$$mn.1 = nm.1.$$

De même, u étant une fonction de deux variables x, y, on a

$$\mathrm{D}_x\mathrm{D}_y.u = \mathrm{D}_y\mathrm{D}_x.u;$$

ainsi les symboles de différentiation satisfont à cette loi.

Donc toutes les propriétés des nombres uniquement fondées sur la loi commutative existent aussi pour tous les symboles opératoires qui satisfont à cette loi.

Si l'on a

$$\varphi_1\varphi_2.u = \varphi_2\varphi_1.u,$$

posant

$$u = \varphi_1,$$

on a

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_1 = \varphi_2 \varphi_1^2 = \varphi_1 \varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1^2 \varphi_2$$

et, en général,

$$\varphi_1^m \varphi_2^n = \varphi_2^n \varphi_1^m.$$

De même qu'on a

$$a^m b^n = b^n a^m$$

et de là

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^m . u = \left(\varphi_1^m + m . \varphi_1^{m-1} \varphi_2 + m . \frac{m-1}{2} \varphi_1^{m-2} \varphi_2 + \ldots\right) . u.$$

Ceci n'aurait pas lieu sans la loi de commutation.

En effet

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^2 = \varphi_1^2 + \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_1 + \varphi_2^2,$$

qui ne se réduit à

$$\varphi_1^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2^2$$

que lorsque $\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_2 \varphi_1$.

Les symboles étant commutatifs, on a l'équivalence

$$e^{\varphi_1 + \varphi_2} . u = e^{\varphi_1} e^{\varphi_2} . u.$$

Il suffit de développer les fonctions, on obtient

$$\left[1 + (\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)^2}{1.2} + \ldots\right] . u$$
$$= \left(1 + \varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{1.2} + \ldots\right)\left(1 + \varphi_2 + \frac{\varphi_2^2}{1.2} + \ldots\right) . u.$$

La coïncidence est évidente.

2. *Loi distributive.* u et v étant des sujets quelconques, lorsqu'on a

$$\varphi . u + v = \varphi . u + \varphi . v,$$

le symbole φ est dit soumis à la loi distributive.

Les nombres satisfont à cette loi. On a

$$a . b + c = a . b + a . c;$$

de même les dérivées de

$$D . u + v = D . u + D . v.$$

De

$$\varphi . u + v = \varphi . u + \varphi . v,$$

on déduit

$$\varphi^n . u + v = \varphi^n . u + \varphi^n . v,$$

ou

$$\varphi^2 . u + v = \varphi . (\varphi u + \varphi v) = \varphi^2 . u + \varphi^2 . v,$$

et de suite et de même

$$\varphi^{-n} . u + v = \varphi^{-n} . u + \varphi^{-n} . v,$$

et, en général,

$$F(\varphi) . u + v = F(\varphi) . u + F(\varphi) . v.$$

F étant une fonction algébrique,

$$\frac{1}{F(\varphi)} . u + v = \frac{1}{F\varphi} . u + \frac{1}{F(\varphi)} v.$$

3. *Loi des indices.* Lorsqu'on a

$$\varphi^m\ \varphi^n . u = \varphi^n . \varphi^m . u = \varphi^{m+n}\ u,$$

le symbole φ satisfait à la loi des indices.

Exemple :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

u étant une fonction de x seul, on a

$$D_x^m . D_x^n . u = D_x^n . D_x^m . u = D_x^{m+n}\ u.$$

Le *Chapitre III* traite de l'intégration des différentielles totales linéaires et débute par ce théorème :

$$(x D_x)^p . A_m x^m = m^p . A_m x^m,$$

car

$$(x D_x) . A_m x^m = m A_m x^m,$$
$$(x D_x)^2 . A_m x^m = m^2 A x^m,$$

et ainsi de suite.

Donc

$$F(x Dx) . A_m x^m = F(m) . A_m x^m;$$

où F est une fonction algébrique de $x D x$.

Si l'on a $U = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$,

$$F(xDx)\,U = F(0)A_0 + F(1).A_1 x + F(2)A_2 x^2 + \ldots + F(n)A_n x^n$$

et aussi $\dfrac{U}{F(xDx)} = \dfrac{1}{F(0)}A_0 + \dfrac{1}{F(1)}A_1 x + \ldots + \dfrac{1}{F(n)}A_n x^n$,

$$a^{xDx}U = A_0 + aA_1 x + a^2 A_2 x^2 + \ldots + a^n A_n x^n,$$

$$\frac{U}{a^{xDx}} = A_0 + \frac{1}{a}A_1 x + \frac{1}{a^2}A_2 x^2 + \ldots + \frac{1}{a^n}A_n x^n,$$

$$F(xDx).e^{A_n x^n} = F(0).1 + F(n)A_n x^n + \frac{F(2n)}{1.2}(A_n x^n)^2 + F(3n).\frac{(A_n x^n)^3}{1.2.3};$$

il suffit de développer $e^{A_n x^n}$.

$$xD_x(xD_x - 1)(xD_x - 2)\ldots(xD_x - n + 1).u = x^n D_x^n.u.$$

$$F(xD_x).x^m v = x^m F(xD_x + m)v.$$

Si $u = x^m$,

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} xD_x(xD_x - 1)(xD_x - 2)\ldots(xD_x - n + 1).x^m \\ = m.m - 1\ldots m - n + 1\,x^m. \end{array} \right.$$

Nous indiquons les relations suivantes faciles à trouver:

$$F(D).uv = uF(D).v + \frac{Du}{1}.F'(D)v + \frac{D^2u}{1.2}.F''(D)v + \frac{D^3u}{1.2.3}.F'''(D)v,$$

$$u\,F(D)v = F(D).uv - F'(D).Du.v + F''(D).\frac{D^2u}{1.2}.v - \ldots$$

Les accents sont des dérivations par rapport à D.

Applications.

$$x^2 D_x^2 y = ax^m + bx^n,$$

équation à intégrer.

Cette équation est équivalente à

$$xD_x(xD_x - 1)y = ax^m + bx^n,$$

dont la solution symbolique est

$$y = \frac{1}{xD_x(xD_x - 1)}(ax^m - bx^n) + \frac{1}{xD_x(xD_x - 1)}\cdot 0$$

Le premier terme est, d'après ce qui précède,

$$\frac{ax^m}{m(m-1)} + \frac{bx^n}{n(n-1)} \text{ [}voir\text{ (1)];}$$

or

$$\frac{1}{xD_x(xD_x - 1)} = \frac{1}{xD_x - 1} - \frac{1}{xD_x},$$

$$xD_x - 1 . Ax = 0, \quad Ax = \frac{0}{xD_x - 1},$$

$$xD_x . B = 0, \quad \frac{0}{xD_x} = B.$$

Ainsi l'intégrale est

$$y = \frac{ax^m}{m(m-1)} + \frac{bx^n}{n(n-1)} + Ax + B;$$

A et B sont deux constantes arbitraires, m et n ne doivent être égaux ni à zéro, ni à l'unité

Le *Chapitre IV* applique le calcul des symboles aux équations à différentielles partielles. Ce qui est très-long, embarrassé, par les procédés ordinaires, devient court, facile et *mnémonique*.

Par exemple, étant donnée l'équation

$$x^n D_x^n z + nx^{n-1} y D_x^{n-1} D_y z + \frac{n.n-1}{1.2} x^{n-2} y^2 D_x^{n-2} D_y^2 z + \ldots = \theta_a + \theta_b,$$

où z est une fonction de x, y; θ_a, θ_b des fonctions homogènes de x, y, z de degré a et b, on trouve de suite

$$z = \frac{\theta_a}{a(a-1)\ldots(a-n+1)} + \frac{\theta_b}{b(b-1)\ldots(b-n+1)} + u_0 + u_1 + \ldots u_{n-1},$$

u_0, u_1, u_2, etc., sont des fonctions homogènes arbitraires de degré 0, 1, 2, etc.

Le *Chapitre V* traite diverses équations remarquables aux différentielles totales et partielles.

Le *Chapitre VI* est consacré à l'intégration de systèmes d'équations différentielles simultanées, totales et partielles. On y intègre d'une manière prompte les équations qui déterminent : 1° les petits mouvements des gaz élastiques, des solides homogènes élastiques et des liquides homogènes incompressibles ; 2° les relations entre la vitesse angulaire de rotation et le temps ; 3° le mouvement azimuthal du plan d'oscillation du pendule. La seconde section renferme des considérations sur la réduction d'intégrales définies.

Le *Chapitre VII* contient des interprétations de symboles ou les résultats de certains symboles agissant sur des fonctions données.

Le *Chapitre VIII* renferme des applications très-intéressantes à la géométrie et que nous donnerons ailleurs (voir *Nouvelles Annales*, t. XIV, p. 221).

L'équation symbolique

$$e^{a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y}\mathrm{F}(x, y) = 0$$

équivaut à l'equation

$$\mathrm{F}(x+a, y+b) = 0$$

ou à un changement d'origine ; l'équation symbolique

$$e^{a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z}\mathrm{F}(x, y, z) = 0$$

équivaut à

$$\mathrm{F}(x+a, y+b, z+c) = 0;$$

l'équation symbolique

$$e^{\omega(x\mathrm{D}_y - y\mathrm{D}_x)}\,\mathrm{F}(x, y) = 0$$

équivaut à

$$\mathrm{F}(x\cos\omega - y\sin\omega,\ x\sin\omega + y\cos\omega) = 0,$$

ou à une rotation ω de la courbe $\mathrm{F}(x, y) = 0$.

Le *Chapitre IX* contient diverses applications sur des opérations symboliques et sur des intégrations.

Le *Chapitre X* et dernier donne les diverses formules du calcul aux différences finies. Voici un spécimen :

$$e^{h\mathrm{D}}.fx = f(x+h), \quad e^{\mathrm{D}}\ fx = f(x+1),$$

d'où

$$(e^{\mathrm{D}} - 1\ .fx = f(x+1) - f(x) = \Delta fx,$$

et, par des opérations successives, on obtient

$$(e^{\mathrm{D}} - 1)^n.f(x) = \Delta^n.fx = f(x+n) - nf(x+n-1) + \frac{n.n-1}{1.2}f(x+n-2) + \ldots,$$

ou

$$\Delta^n u_x = u_{x+n} - nu_{x+n-1} + \frac{n\ n-1}{1.2}u_{x+n-2} - \ldots,$$

et de là

$$\mathrm{F}(\Delta).u_x = \mathrm{F}(e^{\mathrm{D}} - 1).u_x;$$

F est une fonction algébrique quelconque.

$$e^{\mathrm{D}} = 1 + \Delta, \quad e^{n\mathrm{D}}.u_x = (1+\Delta)^n.u_x,$$

d'où

$$u_{x+n} = u_x + n.\Delta u_x + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 u_x.$$

L'ouvrage est terminé par deux appendices où l'on rencontre une très-belle et ingénieuse démonstration d'un théorème de Gauss sur l'action attractive d'une masse placée soit entre deux surfaces fermées qui ne se coupent pas, soit en dehors de ces surfaces.

Cette analyse ne donne qu'une idée incomplète des richesses de cet excellent ouvrage. Puisse bientôt une traduction faire revivre en France le calcul symbolique d'Arbogast et de Servois, calcul qui condense et mnémonise une foule de théorèmes. Telle doit être la tendance de l'enseignement, car la vie est courte, la besogne longue et les ouvriers paresseux. C'est l'opinion du Talmud. Dans un autre endroit il dit :

Mange du pain avec du sel, bois de l'eau dans une écuelle, dors sur la dure et applique-toi avec ardeur à l'étude de la science [Torah (*)]. Exhortation peu goûtée de notre siècle.

Cours de cosmographie ou Éléments d'Astronomie, comprenant les matières du nouveau *Programme* arrêté pour l'enseignement des Lycées et l'admission aux Ecoles spéciales; par *Charles Briot*, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, docteur ès sciences, etc. Paris, 1853; in-8 de 304 pages, 3 planches (sans préface.)

Au temps jadis, lorsqu'on faisait encore des *ouvrages*, chaque auteur expliquait son dessein dans une préface et apprenait au lecteur en quoi l'ouvrage différait en mieux d'autres sur le même sujet. Aujourd'hui que nous ne faisons que des *livres*, toute préface est inutile. Il suffit, pour assurer le débit, chose essentielle, la seule essentielle, d'écrire sur le titre que le livre est conforme aux programmes. *Faites-nous des Lettres persanes*, demandaient les libraires au siècle de Montesquieu. *Faites-nous des livres à programmes*, demandent les libraires au siècle

---

(*) Le θεωρία des Grecs dérive peut-être de l'hebreu *torah*, qui veut dire enseignement, doctrine.

utilitaire. Nous avons ici une excellente réponse, et l'âme commerciale du livre est dans la page finale (293) où l'on donne le *programme arrêté pour les examens du Baccalauréat ès Sciences et pour l'admission à l'École spécialemilitaire de Saint-Cyr et à l'École Polytechnique, avec les renvois aux pages du livre.*

La cosmographie, en se tenant au sens strict de ce mot, ne doit contenir que la description des corps qui composent l'univers, tout comme la *géographie* est la description de la terre, et c'est ce qu'on peut faire en peu de pages. Mais ce mot a reçu une grande extension. Ainsi la cosmographie comprend les mouvements des corps célestes, les moyens de les constater et de les mesurer, et même la connaissance des forces qui produisent ce mouvement. En d'autres termes, la cosmographie est devenue un Traité élémentaire d'astronomie. Pour ne pas éloigner les gens du monde, on évite quelquefois les dénominations scientifiques; mais de telles considérations ne devraient pas subsister dans l'enseignement sérieux universitaire. Le second nom *Éléments d'Astronomie*, que M. Briot a adopté, est le véritable, et c'est le seul qui devrait être adopté.

Le savant professeur auquel nous devons un Traité remarquable de Géométrie analytique et de bellesdémonstrations des théorèmes de mécanique de M. Poinsot, était très-apte à nous expliquer les positions mutuelles et les mouvements relatifs des divers rouages et ressorts du *char céleste*, comme s'exprime la Bible.

Selon la méthode ordinaire, l'auteur part des mouvements *apparents* pour venir aux *mouvements réels*. Lacaille suit une méthode opposée. Il suppose tout de suite un spectateur placé au centre du soleil et autour duquel *valsent* les planètes. La méthode Lacaille me paraît préférable et surtout auprès des personnes étrangères aux sciences exactes. Après avoir expliqué les apparences à notre usage, il faudrait décrire les apparences pour un spectateur placé sur un satellite, sur la lune et même sur un satellite de Jupiter; et ensuite sur une planète inférieure et supérieure (*). On n'insiste pas assez sur ce qu'il faut entendre par le *sens* du mouvement. Le soleil décrit sur la calotte céleste une hélice sphérique. Cette hélice est-elle *dextrorsum* ou *sinistrorsum*? C'est une question à laquelle beaucoup d'élèves ne savent pas répondre, parce que les explications ne sont pas assez nettes. Autre question pour un spectateur placé sur le pôle : Quel est le mouvement de la lune, combien a-t-elle de phases ?

Les théories et les faits cosmiques consignés dans l'*Astronomie* de sir Herschel et dans le *Cosmos* de M. Alexandre de Humboldt sont fidèlement et clairement exposés dans la présente Cosmographie, qui est ainsi au parfait courant de la science. On y trouve les orbites de quelques étoiles doubles calculées récemment par M. Yvon Villarceau (page 292), et les expériences dynamiques de M. Foucault, avec une description du *gyroscope* que M. Briot avait déjà publiée dans la *Revue de l'Instruction publique* (6 janvier 1853). L'explication n'est pas tout à fait à la portée des non-géomètres. M. Yvon Villarceau a eu la bonté de nous remettre depuis longtemps une théorie mathématique de cet admirable instrument, que le défaut d'espace ne nous a pas encore permis d'insérer dans les *Nouvelles Annales*, et que nous donnerons incessamment.

A l'occasion de ces expériences, l'auteur parle du *mécanisme* de Cardan (page 273). Or Cardan ne donne pas ce

---

(*) J'en ai parle il y a quelques annees a Arago, qui m'a dit qu'en effet la methode de Lacaille etait tres-bonne, mais qu'on doit se conformer a la marche suivie par Laplace Je lui ai repondu que le *Jurare in verba magistri* n'est admis qu'en theologie.

mécanisme, comme étant de son invention. Voici ce qu'on lit dans Cardan, sur une voiture où l'empereur Charles-Quint pouvait rester assis tranquillement sur son siége, quels que fussent les mouvements de la voiture :

Simili ratione inventum est ut Cæsaris sedes ita disponeretur ut, quocunque situ constituatur, ille immobilis ac commode, dum vehitur, sedeat. Hoc tractum ex armillarum ratione. Cum enim circuli tres chalybæi constituentur, polis sursum, deorsum, ante, retro, dextra et sinistra mobilibus cum plures non possent esse situs, necesse est ipsum in essedo quomodocunque agatur quiescere perpetuo. Habet hoc aliquid non absimile lucernis a quorum exemplo ducta est ratio : circumvolutæ enim patulæ oleum nequaquam effundunt. (De subtilitate, lib. XVII, de artibus, artificiosisque rebus, p. 612, Card. Opera, tome III. Lugduni, 1663.)

On voit que cette voiture a été précédée de la lampe inversable. Le célèbre Januelo, horloger de Charles-Quint et qu'il a mené avec lui à sa retraite de Yuste, est, dit-on, l'inventeur de la voiture.

Nous soumettons une observation à tous nos cosmographes.

Il n'est pas d'usage en France de citer les auteurs. On pourrait cependant s'écarter de cet usage dans la composition de cosmographies destinées à la jeunesse. Parlant constamment de l'horloge, n'est-il pas convenable de diriger la pensée du lecteur vers l'horloger. Newton et Euler, têtes assez fortes, n'y manquent pas. Écoutons d'ailleurs ce que dit là-dessus un philosophe du XVIII[e] siècle, ami et partisan enthousiaste de Voltaire :

« Les corps semblent assujettis dans leurs mouvements
» à deux sortes de lois essentiellement différentes. Les
» unes sont des conséquences nécessaires de l'idée que
» nous avons de la matière ; les autres paraissent l'effet

» de la volonté libre d'*un être intelligent* qui a voulu » que le monde fût comme il est plutôt que de toute autre » manière. » (Le marquis de Condorcet à M. d'Alembert, sur le système du monde et sur le calcul intégral; page 4. Paris, 1768; in-4.)

Ceci me rappelle une anecdote de la vie de Képler. Dans une réunion de professeurs chez Képler, la conversation roulait sur des questions de philosophie. Lorsque tous furent partis, la femme de Képler, dit à son mari : « J'ai entendu le professeur un tel soutenir que l'univers pouvait être le résultat du hasard. Je t'ai entendu dire souvent qu'il règne partout un ordre admirable; comment peut-on dire que cela provient d'un coup de dé; c'est une grosse absurdité. — Pas si grosse que tu penses. Voyons, lorsque tu veux faire une salade, tu prends des feuilles de chicorée, de l'huile, du vinaigre et du sel. Supposons que tu jettes tous ces ingrédients en l'air, en retombant à terre, ils peuvent se mêler de manière à faire une salade. — Cela n'est pas absolument impossible, j'en conviens, reprit Madame Képler, mais tu es bien convaincu que la salade ne sera jamais aussi bonne que si je l'avais faite moi-même. »

Cette philosophie domestique a bien son prix.

Sopra gli integrali generali di alcune equazioni a derivate parziali a coefficienti costanti. Memoria del socia attuale prof. *Barnaba Tortolini*, inserita nella parte secunda del tomo XXV delle *Memorie della Società italiana delle scienze in Modena*. Modena, 1854; in-4 de 34 pages.

Le savant analyste, connu par tant de beaux travaux, se sert ici de la méthode des *symboles* pour intégrer facilement et avec beaucoup de généralité des équations aux différences partielles qu'on rencontre fréquemment dans la physique mathématique. Essayons de donner une idée de ce remarquable travail.

Soit

$$u = f(x),$$

alors

$$f(x + at) = u + at\,D_x + \frac{a^2 t^2}{1\ 2} D_x^2 + \ldots = e^{at\,D_x},$$

équation symbolique.

Soit maintenant

$$u = f(x, y),$$

alors

$$f(x + at, y + bt) = u + \begin{matrix} t.a\,D_x \\ t.b\,D_y \end{matrix} + \frac{t^2}{1.2}\left|\begin{matrix} a^2 D_x^2 \\ 2ab\,D_x D_y \\ b^2 D_y^2 \end{matrix}\right| + \ldots$$

$$= e^{t\Box}.u$$

où

$$\Box = a\,D_x + b\,D_y,$$

et ainsi de suite.

Étant donnée l'équation aux différences partielles

$$(D_t - a\,D_x - b\,D_y - c\,D_z \ldots - m) = f(x, y, z \ldots T);$$

x, y, z,..., t sont des variables indépendantes, les dérivées étant prises sur la fonction principale u; a, b, c d,..., m sont des constantes.

On a

$$u = e^{mt} e^{t\Box} \psi(x, y, z, \ldots)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{m(t-T)} e^{(t-T)\Box} f(x, y, z, \ldots T)\,dT,$$

ψ est la fonction arbitraire à quoi se réduit f en faisant $t = T$.

Posons

$$F(T) = f[x + a(t - T)y,\ \ b(t - T),\ \ z(t - T), \ldots T],$$

on a

$$u = e^{mt}\psi(x + at, y + bt, z + ct, \ldots) + \int_{t_0}^{t} e^{m(t-\mathrm{T})}\,\mathrm{F}(\mathrm{T})\,d\mathrm{T}.$$

Si l'on a

$$(\mathrm{D}_t - a\,\mathrm{D}_x - b\,\mathrm{D}_y - c\,\mathrm{D}_z \ldots - m)\,u = 0,$$

alors

$$u = e^{mt}\psi(x + at, y + bt, z + ct, \ldots).$$

Voici les principales équations intégrées dans ce Mémoire :

1°. $(a\,\mathrm{D}_x + b\,\mathrm{D}_y + c\,\mathrm{D}_z)^n . u = f(x, y, z)$;

2°. $(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2) . u = f(x, y, z)$;

3°. $(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_y^2 + \mathrm{D}_z^2)^2 . u = f(x, y, z)$;

et, en général,

$$(\mathrm{A}\mathrm{D}_x^m + \mathrm{B}\mathrm{D}_y^m + \mathrm{C}\mathrm{D}_z^m)^n . u = f(x, y, z).$$

L'intégrale est débarrassée d'imaginaires qui se trouvent dans l'intégrale donnée par Poisson.

L'on donne les fonctions arbitraires à ajouter à chaque intégration et toujours par une marche uniforme. Nous regrettons que les limites imposées au *Bulletin* ne nous permettent pas d'entrer en plus de détails.

BIOGRAPHIE.

QUERRET (Jean-Joseph).

Querret (Jean-Joseph) naquit à Saint-Malo, en 1783, de parents sans fortune. Son père, entrepreneur de bâtiments, soutenait par son travail une famille composée de trois enfants dont Querret était le plus jeune. Le père mourut pendant que ses enfants étaient encore en bas âge, et sa veuve eut à passer plusieurs années laborieuses et pénibles, jusqu'à ce que son fils pût être en âge de venir au secours de sa famille par son propre travail. Ce moment ne tarda pas à arriver; dès l'âge de onze ans, Querret était admis à l'école d'hydrographie de sa ville natale, et ses progrès y furent si rapides, que, deux ans plus tard, M. Lecerf, son professeur, le jugeait capable de le suppléer.

C'est ainsi que Querret, à l'âge de treize ans, entrait dans la carrière de l'enseignement. Il s'y livra avec une ardeur qui ne se démentit jamais, et, outre une classe publique qu'il faisait deux fois par jour, il donnait un grand nombre de leçons particulières. Cependant son temps n'y était pas entièrement consacré; il trouvait encore le moyen de se livrer à des études approfondies et acquit des connaissances très-étendues sur l'histoire des sciences qu'il enseignait.

Ces études annonçaient un esprit sérieux et distingué. M. Lecerf pressa Querret de se présenter pour entrer à l'École Polytechnique, où les admissions étaient alors gratuites.

Mais Querret était le seul soutien de sa famille; son absence aurait été pour elle une cause de privations. Il sacrifia à cette considération toute-puissante le brillant avenir que lui aurait ouvert une admission certaine à l'École.

Parvenu à l'âge de vingt ans, Querret sentit la nécessité d'apprendre les langues anciennes et voici comment il y parvint. Au commencement de ce siècle, il s'était formé à Saint-Malo une société de plusieurs jeunes gens : les uns enseignaient les mathématiques aux autres, qui, à leur tour, devenaient professeurs de langues. Le dimanche était ordinairement consacré à ces réunions; les progrès furent rapides. Querret était le professeur de mathématiques; il avait pour élèves dans les sciences, puis pour maîtres de langues, dans cette espèce d'enseignement mutuel, deux frères, devenus plus tard diversement célèbres : l'un, longtemps administrateur spirituel du diocèse de Saint-Brieuc, est aujourd'hui à la tête des Frères de la Doctrine chrétienne, qui rendent tant de services à l'instruction primaire; l'autre était l'illustre auteur de l'*Essai sur l'Indifférence* et des *Paroles d'un Croyant*. Des liaisons d'amitié entre Querret et ces hommes ont duré toute la vie.

En 1812, Querret avait été mis à la tête du collége de Saint-Malo, avec le titre de chef d'institution, qu'il conserva pendant onze ans. Vers la fin de cette administration, il avait acheté, aux environs de Saint-Malo, une propriété où il se retira en 1823, à l'époque où des discussions survenues avec le conseil municipal le forcèrent d'abandonner ses fonctions. Déjà plusieurs écrits l'avaient fait connaître. En 1822, il avait publié un petit *Traité d'Arithmétique*, destiné à l'enseignement pour les écoles primaires, et dont il a été fait plusieurs éditions; il avait adressé au *Journal de Mathématiques*, rédigé par M. Gergonne (*), depuis recteur de l'Académie de Montpellier, plusieurs articles qui l'avaient fait avantageusement remarquer des hommes spéciaux; aussi, en 1824, M. l'abbé Jean-Marie de Lamennais, alors vicaire général de la grande aumônerie de France, l'engagea-t-il vivement à faire un voyage à Paris. A peine arrivé, Querret se trouva en relation avec Cauchy, Binet, Poisson, Ampère, Francœur, Arago, Thenard, etc., qui apprécièrent l'étendue de ses connaissances et conçurent pour lui une haute estime.

Malgré les instances qui lui furent faites pour qu'il restât à Paris, Querret n'y résida que le temps nécessaire

(*) Tomes XII, XIII, XIV, XV. Au tome XII, p. 362 (1823), sa belle démonstration sur l'équivalence des tétraèdres. Tm.

pour subir avec distinction les épreuves du doctorat ès Sciences. Sa thèse de mathématiques fut surtout remarquée. « C'est un bon ouvrage, » disait Legendre.

Tous les jeunes gens de nos écoles connaissent, en effet, aujourd'hui cette ingénieuse et élégante démonstration des pyramides équivalentes, due à Querret; elle sert de base à une foule de démonstrations pour la solidité des corps, et Legendre, comme on le sait, l'a insérée avec les plus grands éloges dans son *Traité élémentaire de Géométrie*.

Docteur ès Sciences, officier de l'Université, Querret fut nommé professeur de Mathématiques transcendantes à la Faculté des Sciences de Montpellier. Il y arriva en 1825.

Malgré les succès de son enseignement, Querret resta peu à Montpellier; il désirait vivement se rapprocher de sa famille, et, le 14 décembre 1826, il fut appelé à la chaire de Physique du collége royal de Nantes, avec l'autorisation de conserver le titre de professeur de Faculté et la moitié des appointements qu'il avait à Montpellier. Pendant son séjour à Nantes, il fut admis au nombre des membres de la Société royale académique de cette ville.

L'année suivante, et toujours par le désir de se rapprocher encore davantage de sa famille, il alla occuper au collége royal de Rennes une place semblable à celle qu'il remplissait à Nantes, et il joignit à ses fonctions de professeur des sciences mathématiques et physiques un cours de géométrie et de mécanique appliquées aux arts, établi à Rennes par l'administration municipale.

M. Charles Dupin vint examiner à Rennes cet enseignement, et, sur son Rapport, M. le Ministre de l'Instruction publique envoya à Querret un grand ouvrage de mathématiques en témoignage de sa haute estime.

C'est en ce moment qu'éclata la révolution de juillet. Le gouvernement nouveau supprima le cumul et Querret eut à choisir entre les fonctions qu'il remplissait à Rennes et celles qu'il avait remplies à Montpellier. Naturellement il opta pour ces dernières.

A peine arrivé à Montpellier, les fatigues du voyage, le climat du Midi, l'éloignement de sa femme et de ses nombreux enfants, et peut-être aussi d'honorables regrets politiques, altérèrent sensiblement la santé de Querret. Un congé d'un an lui avait été accordé; mais, en 1832, l'état de sa santé ne lui permettait pas encore d'aller reprendre ses travaux à Montpellier, et il demanda au Ministre de l'Instruction publique l'autorisation de rester, avec des appointements modiques, dans ses foyers jusqu'en 1834, époque à laquelle il aurait complété le temps nécessaire pour avoir droit à une pension de retraite. Sa demande ne fut point accueillie, et, par un arrêté en date du 19 avril 1833, le Ministre déclara sa place vacante à la Faculté de Montpellier. Cet arrêté doit paraître au moins bien rigoureux envers un professeur dont les travaux méritaient assurément d'autres égards.

Toutefois Querret se résigna et se retira à la campagne, rentrant dans la solitude de ses études, ne songeant plus à s'occuper que de l'éducation de sa nombreuse famille. Dans sa retraite, les jeunes gens qui se livraient aux sciences étaient sûrs de trouver auprès de Querret toutes les ressources dont ils avaient besoin. Il se rendait souvent chez les Frères de la Doctrine chrétienne.

Trois ans avant sa mort, il songea à fonder à Dinan un établissement qui réunît à la fois, sous la surveillance de l'autorité municipale et universitaire, sous son administration et celle de M. l'abbé de Lamennais, les avantages de l'instruction secondaire et ceux de l'enseignement primaire. Le Ministre avait donné son assentiment au projet présenté, lorsque des intrigues et des tracasseries, suscitées dans un intérêt tout matériel, vinrent en empêcher la réussite. Querret avait oublié les persécutions récentes aussi bien que les anciennes, lorsque la mort vint l'enlever à la science, à sa famille et à ses amis, le 8 décembre 1839, à l'âge de cinquante-six ans.

Il nous reste à indiquer, en quelques mots, ses principaux ouvrages.

Outre le petit Traité méthodique d'Arithmétique déjà indiqué, il avait publié :

1°. En 1819, des *Leçons d'Hydrographie,* dont il fut fait une seconde édition dix ans plus tard avec la collaboration de Michelle, professeur d'hydrographie, prédécesseur de M. Delafoie, professeur actuel. C'est à l'usage des capitaines de cabotage. Imprimerie de Hovins, à Saint-Malo.

2°. Un *Traité d'Arithmétique,* plus étendu, suivi d'une *Exposition des principes fondamentaux de l'Algèbre, avec leur application à l'Arithmétique et au Commerce.* Il y a eu également deux éditions de cet ouvrage.

3°. Des *Tables de Logarithmes* et des sinus et cosinus de seconde en seconde, et des tangentes et cotangentes de minute en minute pour tous les degrés du quart de cercle; suivies d'une *Table des Logarithmes des nombres,* depuis 1 jusqu'à 10800, avec une introduction en français et en anglais, dans laquelle on ramène à l'usage des sinus et cosinus seulement tous les problèmes usuels de l'astronomie nautique. Un gros volume in-8; Saint-Malo; L. Hovins, imprimeur libraire; 1830.

4°. Des *Leçons élémentaires d'Algèbre,* approuvées par le Conseil royal.

5°. Des *Leçons élémentaires de Géométrie plane*, qui devaient être complétées par la publication de la géométrie à trois dimensions.

Tels sont les principaux ouvrages publiés par Querret;

mais il reste dans ses papiers des recherches beaucoup plus longues et des travaux bien plus étendus encore. Un homme spécial y puiserait sans doute de précieux renseignements.

Nous devons citer, parmi ses travaux, des mélanges d'arithmétique, d'algèbre, d'hydrographie, de mécanique et d'astronomie; des Notices sur les travaux et la vie de plusieurs mathématiciens célèbres : L'Hôpital, Jean Bernoulli, Lacroix, Bezout, etc.; des Cours et des Programmes de Chimie et de Physique, mais surtout une grande entreprise que la mort de Querret n'a pas permis de mener à fin : la traduction du *Calcul intégral* d'Euler, ouvrage en trois gros volumes in-4, dont Querret n'a eu le temps de traduire que les deux premiers. On doit faire des voeux pour qu'un homme, ami de la science, entreprenne de terminer et de publier ce grand travail, dont l'apparition ferait sans doute sensation dans le monde savant. (*Communiqué par* M. CABARET, *docteur en médecine, ami de Querret*)

Note du Rédacteur. La traduction du *Calcul différentiel et intégral* d'Euler est encore aujourd'hui l'ouvrage le plus clair qu'on puisse mettre entre les mains des élèves, et, en y ajoutant les progrès faits depuis, ce serait le meilleur manuel pour les professeurs. On ne saurait trop engager la famille à faire cette publication qui consolerait de tant de productions sans nom, sans valeur scientifique que chaque jour voit éclore et disparaître. Il y a quelques années, il s'est agi, à Bruxelles, de traduire les œuvres d'Euler. L'entreprise n'a pas abouti. Les ouvrages publiés sont : *Lettres à une princesse d'Allemagne, l'Algèbre, l'Arithmétique, Essai sur la Théorie de la musique ;* en tout cinq volumes. Un éditeur acquerrait un grand crédit, par un tel travail, mériterait les encouragements du gouvernement et la reconnaissance de la postérité.

NEPER.

Né à 1550 à Merchiston, non loin d'Édimbourg, il est mort le 3 avril 1617, âgé de soixante-sept ans.

Un de ses ancêtres, Donald, second fils du comte de Lennox sous le règne de David le second (XIV^e siècle), ayant fait une très-belle action, sans égale, *pair less*, la famille fut surnommée *Nepair*. Du reste, ce nom est différemment orthographié : *Neper*, *Neperus*, *Napeir*, *Naper*, *Napier*. C'est ce dernier nom que la famille porte maintenant.

Il a hérité de la baronnie de Merchiston, en 1605, par la mort de son père, mais il n'était pas *pair d'Écosse* et ne portait pas le titre de *lord*. C'est son fils et héritier, Archibald, qui a été élevé à cette dignité en 1626.

Neper fit son éducation au collége de Saint-Andrews où il entra en 1563, à l'âge de treize ans. Sorti de ce collége, il fit une tournée sur le continent, et, revenu en 1571 à Merchiston, il s'y maria à l'âge de vingt et un ans. Il ne quitta plus l'Écosse, et, zélé puritain, il fut membre de plusieurs synodes presbytériens; il fut un de ceux que l'assemblée générale d'Édimbourg députa vers Jacques pour demander l'excommunication contre certains seigneurs catholiques, parmi lesquels figure le père de la seconde femme de son père. Il avait perdu la première en 1579.

Étant encore étudiant à Saint-Andrews, il conçut l'idée, à ce qu'il raconte lui-même, de dévouer sa vie à l'interprétation des prophéties, étant excité à cette entreprise, dit-il, par l'aveuglement des catholiques qui ne voulaient pas voir que leur croyance était vouée à la destruction dans le livre de l'*Apocalypse*; et il dit même, vers la fin de sa vie, que cette entreprise exégétique a toujours été sa principale occupation, et les mathématiques seulement un délassement. La première édition de son ouvrage sur l'*Apocalypse* est d'Édimbourg, 1593, in-4, et la dernière édition qu'il a donnée lui-même est de 1611, sous ce titre :

A plaine discovery of the whole revelation of S. John, set down in two treaties: the one searching and proving the true interpretation thereof; the other applying the same paraphrasticallie and historicallie to the text; set forth by John Napeir (sic), *L. of Merchiston and now revised, corrected and inlarged by him, with a resolution of certain doubts moved by some wellaffected brethren; whereunto are annexed certain oracles of Sibylla agreing with the revelation and other places of Scripture. London, printed for John Norton*; 1611, *cum privilegio Regiæ Majestatis*. In-4 de VIII-375 pages.

Neper fixe la fin du monde entre 1688 et 1700, et, après nous avoir donné les prophéties sibyllines qui nous restent, il termine son ouvrage par cette singulière invocation :

O toi Rome, si tu veux te réformer et croire au vrai christianisme, crois en cette révélation qui proclame publiquement ta ruine; et si tu persistes à rester païenne, crois les anciens oracles de la Sibylle, si longtemps vénérée dans ta capitale; repens-toi à ton heure suprême si tu aimes ton salut éternel. Amen.

Quelle aberration ! Pascal dit que jamais on ne fait le mal si pleinement, si gaîment que quand on le fait par conscience; il en est de même des folies Jamais on ne les dit avec tant d'abondance et d'assurance que lorsqu'on les puise dans ce qu'on appelle sa conscience. *Folie* est le nom que donne Newton à cette exégèse apocalyptique appliquée à deviner l'*avenir*. Que fait-il lui-même? Il remplace cette folie par une autre et se sert de cette exégèse pour expliquer le *passé*. A cette occasion on se rappelle encore cet admirable chapitre où Pascal décrit l'homme comme un composé de grandeur et de misère, et Pascal lui-même, sublime géomètre, sectaire digne de pitié, est une preuve éclatante de cette composition binaire. Il sait parfaitement que la terre n'est qu'une molécule de l'univers, et sans cesse il rattache le sort de l'univers à l'histoire de cette molécule, soumettant tout au problème des *parties*, tout excepté cette histoire.

Toutefois cet ouvrage de Neper, dont le plan est géométrique, a fait une assez grande sensation. Il y en a eu deux éditions presque consécutives en 1641 et 1645 à Édimbourg, format in-4. Il a été traduit en français à la Rochelle, en 1662, format in-8, sous ce titre :

Ouverture de tous les secrets de l'Apocalypse de saint Jean, par deux Traités : l'un recherchant et prouvant la vraie interprétation d'icelle ; l'autre appliquant au texte cette interprétation paraphrastiquement et historiquement ; par Jean Napeir, c'est-à-dire *non pareil*, sieur de Merchiston, *revue par lui-même* et mise en français par Georges Thomson, Escossais.

Il y a une seconde édition aussi in-8 de 1605. Du reste, il en existe plusieurs traductions en allemand. Il semble que l'esprit humain a aussi son oïdium qui l'infecte de temps à autre. Ainsi aujourd'hui les tables tournantes et parlantes, les tendances mystiques et thaumaturgiques, les efforts pour remplacer les classiques païens par les écrivains pieux du moyen âge, sont à coup sûr les effets d'un tel oïdium.

Neper n'est pas le premier protestant qui ait converti l'œuvre de saint Jean en arme offensive et ce n'est pas à ce titre que l'immortalité est acquise à son nom. Il doit cette immortalité à son second ouvrage *Mirifici logarithmorum*, qui s'adresse non à une secte, mais au genre humain ; nous en avons parlé longuement (*voir* p. 1 et 40).

La même idée de raccourcir les calculs se retrouve encore dans son troisième et dernier ouvrage :

Rabdologiæ seu numerationis per virgulas libri duo : cum appendice de expeditissimo multiplicationis promptuario, quibus accessit et arithmeticæ localis liber unus; authore et inventore JOANNE NEPERO, barone Merchistoni, etc. Scoto., Edimbur., 1617; in-12.

Dans la dédicace, *Alexandro Setonio.... supremo regni Scotiæ Cancellario*, Neper dit qu'il a publié, l'année précédente, des logarithmes pour faciliter les calculs et que depuis il avait découvert une meilleure espèce de logarithmes; mais, à cause de sa mauvaise santé, il abandonne le soin de calculer ces logarithmes à d'autres et principalement à *Henrico Briggio, Londini publico geometriæ professori.* Il aurait dû ajouter que l'idée de ces nouveaux logarithmes appartient à Briggs.

Voici, en peu de mots, la construction de cet instrument rabdologique (*) connu sous le nom de *bâtons de Neper*. Il se compose de neuf planchettes rectangulaires séparées. La hauteur de chaque rectangle contient neuf fois la largeur. On divise par des traits chaque rectangle en neuf petits carrés. Dans un premier rectangle, on écrit 1 dans le premier carré, 2 dans le second carré, 3 dans le troisième carré, et ainsi de suite jusqu'à 9; c'est le rectangle *régulateur* qui sert de guide. Dans un second rectangle, on écrit 2 dans le carré supérieur et on divise ensuite chacun des huit autres carrés par des diagonales tirées de gauche à droite en deux triangles. Dans le second carré on écrit 4 dans le triangle supérieur et rien dans le triangle inférieur; de même 6 dans le troisième carré et 8 dans le quatrième carré; pour le cinquième carré on a 10, on écrit 0 dans le triangle supérieur et la dizaine 1 dans le triangle in-

(*) ῥάβδος, *bacillus*, le *Reiffe* des Allemands dérive de ῥάβδος.

férieur; pour le sixième carré, on a $12 = 2.6$, on écrit 2 dans le triangle supérieur et 1 dans le triangle inférieur, et ainsi de suite jusqu'à $18 = 2.9$. On arrange de même la troisième planchette, en écrivant 3 dans le carré supérieur et 6, 9, 12, 15, 18, etc., multiples successifs de 3, dans les autres carrés, ayant soin de mettre les dizaines dans le triangle inférieur; on agit de même pour les planchettes restantes. Supposons maintenant qu'on veut multiplier 9875 par 6; on met à côté les unes des autres, en allant de gauche à droite, les quatre planchettes 9, 8, 7, 5 et à côté le rectangle *régulateur*. Alors sur la ligne qui répond à 6 du rectangle régulateur, on lit les produits 6.5, 6.7, 6.8, 6.9; il suffit d'ajouter les dizaines d'un triangle inférieur aux unités du triangle supérieur suivant. Lorsque le multiplicateur a plusieurs chiffres, on obtient ainsi les produits partiels. Cet instrument n'est pas sans utilité; Lambert dit en avoir fait quelquefois usage; Servois, un des premiers promoteurs de la géométrie segmentaire, a construit un semblable instrument perfectionné et amplifié. Nous pourrons peut-être en donner la description (*).

SUR LA MALADIE DE NEWTON.

Dans le volume XII des *Transactions de la Société royale d'Édimbourg*, publié en 1852, il y a une Notice de M. James Crantor Gregory, professeur de physique au collége de cette ville, sur un manuscrit autographe de Newton, offrant des notes sur le troisième livre des *Principes*, manuscrit découvert dans les papiers de David

(*) Cet instrument est à Besançon en la possession de M. Simonnot, capitaine d'artillerie en résidence fixe, neveu et héritier du géomètre, mort célibataire.

Gregory. L'auteur a pour but de réfuter les assertions de M. Biot, relatives à l'accès de folie de Newton en 1692.

Voici ce qu'on lit dans une lettre de Huyghens à Leibnitz, en date du 8 juin 1694 :

« Je ne sais si vous avez sceu l'accident arrivé au bon » M. Newton, sçavoir qu'il a eu une atteinte de phré- » nésie qui a duré dix-huit mois et dont on dit que ses » amis, à force de remèdes et de le tenir enfermé, l'ont à » peu près guéri maintenant. Voilà un grand malheur » et le plus fâcheux qui puisse arriver à un homme. »

Leibnitz répond (22 juin 1694) :

« Je suis bien aise d'apprendre la guérison de M. New- » ton aussitost que la maladie qui estait sans doute des » plus fascheuses. C'est à des gens comme vous, Mon- » sieur, et luy, que je souhaite une longue vie, préféra- » blement à d'autres dont la perte ne seroit guère consi- » dérable en parlant comparativement. »

Et dans la suivante du 14 septembre de la même année, on lit : « N'a-t-on point de nouvelles de la restitu- » tion entière de M. Newton? Je le souhaite fort (*). »

Une année après, presque jour pour jour, le 21 juin 1695, Leibnitz écrit dans la dernière lettre de cette correspondance avec Huyghens :

« J'ay appris de M. Bonval Basnage que vous avez » esté malade, mais j'espère que vous vous porterez bien » présentement. »

Cet espoir ne s'est pas réalisé. Huyghens est mort le 8 juillet 1695, à ce qu'on présume, à la suite d'une maladie *mentale*.

(*) Dans cette même Lettre, on trouve les définitions suivantes :
Diligere, chérir, est se faire un plaisir de la félicité d'autrui.
La bienveillance est un *habitus diligendi*.
La charité est une bienveillance générale.
La sagesse est la science de la félicité.
La justice est une charité conforme à la sagesse.

THÉORÈME DE FERMAT SUR LES NOMBRES POLYGONAUX.

Le théorème de Fermat sur les nombres polygonaux est cité par Descartes qui l'attribue à un M. de Sainte-Croix qui proposait souvent à Descartes des questions sur les nombres.

Voici le passage d'une lettre de Descartes au P. Mersenne, en date du 27 juillet 1638.

« Car supposant le théorème de M. de Sainte-Croix,
» à savoir que tout nombre se peut réduire à trois tri-
» gones, à quatre carrés, à cinq pentagones, etc, ou à
» moins.... Mais, pour ce théorème, qui est sans doute
» l'un des plus beaux qu'on puisse trouver touchant les
» nombres, je n'en sais point la démonstration. Je la
» juge si difficile, que je n'ose entreprendre de la chercher. » (*Œuvres*, t. VII, p. 113; édit. Cousin.)

On lit dans la vie de Descartes par Baillet (tome I, page 146) :

« Il semble qu'on pourroit aussi rapporter au temps
» de la demeure de M. Descartes à Paris (1626) l'amitié
» qu'il eut avec M. Frenicle l'aîné qu'il appelle souvent
» M. de Bessy et M. de Sainte-Croix.... M. de Sainte-
» Croix étoit (*) un autre arithméticien insigne, mais
» encore plus intime ami de M. Descartes; c'est le même
» que nous trouvons appelé par d'autres André Jumeau,
» qui étoit prieur de Sainte-Croix et qui avoit été pré-
» cepteur de M. le duc de Verneuil. M. Descartes témoi-
» gnoit estimer très-particulièrement la connoissance
» profonde que M. de Sainte-Croix avoit de l'arithmé-
» tique et de l'algèbre. »

(*) Racine écrit déjà paraître, connaître; *ai* au lieu de *oi*. Ainsi, Racine suivait en partie l'orthographe que Voltaire a généralisée et fait admettre.

SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE
attribué à Archimède, et dit *de bovino*.

On sait que l'Anthologie grecque est une collection de petits poëmes nommés *épigrammes* (*). Parmi ces poëmes il y en a plusieurs qui renferment des énoncés où il s'agit de deviner des nombres. On trouve le texte, la traduction en vers latins et les solutions de quarante-cinq de ces épigrammes dans l'*Histoire des Mathématiques* de Heilbronner (p. 845). Ils se résolvent par une équation du premier degré à une inconnue et quelques-uns à deux inconnues. Une épigramme grecque, renfermant une question d'analyse indéterminée, a été découverte en 1773 par Lessing dans la bibliothèque de Brunswick et il l'a publiée dans le tome I^er, p. 421, de son ouvrage intitulé : *Beitrage zur geschichete und litteratur:* documents pour l'histoire et la littérature. Il y a neuf conditions à remplir. Nous donnons ci-joint le texte grec et une traduction vers pour vers presque littérale et qu'il faut lire avant de continuer. L'épigramme est suivie d'une scolie grecque qui donne les nombres suivants sans dire comment on les a trouvés.

Soient

Nombres.			Nombres.		
B	Taureaux	blancs.	b	Vaches	blanches.
N	—	noirs.	n	—	noires.
J	—	jaunes.	j	—	jaunes.
T	—	tachetés.	t	—	tachetées.

(*) L'édition la plus complète et la plus recente est celle qui a eté donnée par Fredéric Jacobs (1813-17) en 3 vol. in-8; toutefois, on a omis l'epigramme d'Archimede.

$$1^\circ.\ \left\{\begin{array}{lll} B = 829318560 = \frac{5}{6} N + J \\ b = 576508800 = \frac{7}{12} \text{ de } 2^\circ \\ \overline{1405827360} \end{array}\right.$$

$$2^\circ.\ \left\{\begin{array}{lll} N \quad 596841120 = \frac{9}{20} T + J \\ n \quad 391459680 = \frac{9}{20} \text{ de } 3^\circ \\ \overline{988300800} \end{array}\right.$$

$$3^\circ.\ \left\{\begin{array}{lll} T = 588644800 = \frac{13}{42} B + J \\ t = 281265600 = \frac{11}{30} \text{ de } 4^\circ \\ \overline{869910400} \end{array}\right.$$

$$4^\circ.\ \left\{\begin{array}{lll} J = 331950960 \\ j = 435137040 = \frac{13}{42} \text{ de } 1^\circ \\ \overline{767088000} \end{array}\right.$$

Total des quatre troupeaux: 4031126560.

Ces nombres ne sont pas les plus simples, mais satisfont aux sept premières conditions. Le scoliaste ajoute que B + N est un carré et T + J un nombre triangulaire; ce qui serait conforme à la huitième et neuvième condition; mais cela n'existe pas. On voit de suite que ces nombres sont tous divisibles par 80. Effectuant la division, on trouve

$$1^{er}\ \text{Troupeau} \ldots \left\{\begin{array}{l} B = 10366482 \\ b = 7206360 \\ \overline{17572842} \end{array}\right.$$

$$\text{2}^{\text{e}}\ \textbf{Troupeau}\quad \left\{\begin{array}{rr} N = & 7460514 \\ n = & 4893246 \\ \hline & 12353760 \end{array}\right.$$

$$\text{3}^{\text{e}}\ \text{Troupeau}\ .\quad \left\{\begin{array}{rr} T = & 7358060 \\ t = & 3515820 \\ \hline & 10873880 \end{array}\right.$$

$$\text{4}^{\text{e}}\ \text{Troupeau}\ .\ .\quad \left\{\begin{array}{rr} J = & 4149387 \\ j = & 5439213 \\ \hline & 9588600 \end{array}\right.$$

$$4149387 = 9^2\ 11\ 4657\,;$$

4657 est un nombre premier. J n'est divisible ni par 11 ni par 4657; ces nombres sont donc les plus simples qui satisfont aux sept premières conditions.

Le total se monte à 50389082, renfermant

Taureaux ..	..	29334443
Vaches	......	21054639
	Total. .	50389082

$$29334443 = 6299\ 4657\,,$$

deux nombres premiers qui ne divisent pas le nombre des vaches.

La huitième condition est que $B + N$ soit un carré; or

$$B + N = 17826996 = 4\ 11.29.4657.$$

En multipliant donc tous ces nombres par

$$3\ 11.29.4657 = 4456749,$$

on satisfait à la huitième condition et l'on trouve

$$\text{1}^{\text{er}}\text{ Troupeau}\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{r} B = 46200808287018 \\ b = 32116937723640 \\ \hline 78317746010658 \end{array}\right.$$

$$\text{2}^{\text{e}}\text{ Troupeau}\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{r} N = 33249638308986 \\ n = 21807969217254 \\ \hline 55057607526240 \end{array}\right.$$

$$\text{3}^{\text{e}}\text{ Troupeau}\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{r} T = 32793026546940 \\ t = 15669127269180 \\ \hline 48462153816120 \end{array}\right.$$

$$\text{4}^{\text{e}}\text{ Troupeau}\ldots\ldots\ \left\{\begin{array}{r} J = 18492776362863 \\ j = 24241207098537 \\ \hline 42733983461400 \end{array}\right.$$

Taureaux	130736249505807
Vaches.	93835241308611
Total.....	224571490814418

Il ne reste plus que la neuvième condition à remplir, savoir que J + T égale un nombre triangulaire; mais B + N devant toujours rester un carré, il faut multiplier tous les nombres trouvés par la quantité indéterminée u^2 et nous devrons satisfaire à

$$(J + T)\,u^2 = 51285802909803\,u^2 = \frac{x^2 + x}{2}.$$

$$102571605819606\,u^2 = x^2 + x,$$

$$2x = -1 \pm \sqrt{4 \cdot 102571605819606\,u^2 + 1}.$$

La quantité qui multiplie 4 est paire sans être divisible par 4; donc le coefficient de u^2 n'est pas un carré parfait; par conséquent, il existe une infinité de valeurs rationnelles et entières de u qui donne pour radical un nombre entier nécessairement impair (LEGENDRE, *Théorie des nombres*) et x sera entier et positif ; au résumé, il s'ensuit que la question a un nombre infini de solutions.

Si l'on n'avait égard qu'aux taureaux, on aurait pour satisfaire aux trois premières conditions :

$$\begin{aligned} B &= 2226, \\ N &= 1602, \\ T &= 1580, \\ J &= 891, \\ B + N &= 3828, \\ T + J &= 2471. \end{aligned}$$

Quatre savants se sont occupés de ce problème. Le recteur Christian Leist a montré non-seulement l'exactitude des nombres donnés par le scoliaste, mais a trouvé les nombres les plus simples donnés ci-dessus. Son travail est inséré dans l'ouvrage de Lessing cité ci-dessus.

A l'occasion d'une solennité académique qui devait avoir lieu, MM. Struve père et fils ont publié l'opuscule suivant : *Altes griechisches Epigramm mathematischen Inhalts von Lessing erst einmal zum Drucke befordert jetzt neu abgedruckt und mathematisch und kritisch behandelt:* Ancienne épigramme grecque d'une teneur mathématique, publiée pour la première fois par Lessing ; éditée de nouveau et traitée sous le point de vue mathématique et critique par le Dr J. Struve, directeur du gymnase royal à Altona et le Dr K.-L. Struve, directeur du gymnase communal de Konigsberg, père et fils. Altona, 1821 ; in-8 de 47 pages.

Le texte original de quarante-quatre vers, alternativement hexamètres et pentamètres, est à la page 7 ; il est suivi d'une traduction vers pour vers ; viennent ensuite des calculs beaucoup trop longs pour les lecteurs auxquels ils s'adressent. Nous les avons rapportés ci-dessus en changeant l'ordre, moyen d'abréviation. Les calculs sont du père; il croit que le nom d'Archimède est une pure invention. En effet, cette épigramme est complétement étrangère à l'esprit des travaux qui appartiennent incontestablement au géomètre sicilien; Struve père pense même que les deux dernières conditions ont été ajoutées depuis. C'est encore probable, car les solutions du scoliaste pour les sept premières conditions sont justes et on lui fait dire une chose fausse pour les deux dernières conditions. D'ailleurs, la neuvième et dernière condition consiste à résoudre en nombres entiers l'équation indéterminée

$$ax^2 + 1 = y^2,$$

a n'étant pas un carré; solutions que l'on ne connaît que depuis Pell (1666). Struve dit que c'est là le *nœud gordien*. Il n'y a rien là de gordien; le seul embarras est la longueur des calculs qui ne valent pas la peine d'être faits.

L'opuscule est terminé, à partir de la page 38, par les observations critiques qui sont de Struve fils. Nous les avons indiquées au bas du texte. Du reste, il déclare ne rien comprendre aux vers 35 et 36, à cause de l'expression πλίνθου. Car les Grecs avaient diverses dénominations pour les nombres solides (στερεοὶ) résultant du produit de trois facteurs : 1° κυβοί, les trois facteurs étant égaux; 2° σφηνίσκοὶ, coins, les trois facteurs inégaux; 3° δοκίδες, poutres, deux facteurs égaux et le troisième plus grand; 4° πλιντίδες, briques, deux facteurs égaux et le troisième plus petit. Ainsi πλινθοῦ ne peut signifier un carré comme cela devrait être. L'auteur soupçonne que le passage est corrompu ou qu'il y a quelque omission. Nous verrons une autre explication dans la brochure suivante à laquelle donna lieu une autre solennité académique : *Ad memoriam Kregelio-Sternbachianam in auditorio Jureconsultorum die* XVII *julii* MDCCCXXVIII.H.IX *celebrandam invitant ordinum academiæ Lips. Decani Seniores ceterique adsessores. De archimedis problemate bovino.* Brochure in-4 de 12 pages.

Charles de Sternbach, homme généreux, avait institué un prix d'encouragement pour l'étude des mathématiques à l'université de Leipsig. M. Frédéric-Edouard Thieme, jeune homme versé dans ces sciences, lut cette production pour célébrer l'aniversaire de Sternbach. L'auteur critique vivement l'œuvre des Struve et blâme avec raison certaines jovialités qui sont d'un goût un peu hasardé, et il propose une exégèse qui amène des nombres complétement différents de ceux de Struve. Il conserve τετραχῇ, mot final du verset 24 du manuscrit que Struve a remplacé par ατρέκες, ce qui change la sixième condition en celle-ci : Les vaches tachetés formaient les quatre cinquièmes plus les quatre sixièmes de toute la partie jaune. Alors les nombres suivants satisfont aux sept conditions :

$$\text{1}^{\text{er}}\text{ Troupeau}\dots\dots\left\{\begin{array}{ll} \text{B} & 48066018 \\ b & 47981940 = \frac{7}{12} \text{ de } 2^{\circ} \\ \hline & 96053958 \end{array}\right.$$

$$\text{2}^{\text{e}}\text{ Troupeau}\dots\dots\left\{\begin{array}{ll} \text{N} & 34591986 \\ n & 47673054 = \frac{9}{20} \text{ de } 3^{\circ} \\ \hline & 82265040 \end{array}\right.$$

$$\text{3}^{\text{e}}\text{ Troupeau}\dots\dots\left\{\begin{array}{ll} \text{T} & 34116940 \\ t & 71823180 = \frac{44}{30} \text{ de } 4^{\circ} \\ \hline & 105940120 \end{array}\right.$$

$$4^{e}\text{ Troupeau}\ldots\ldots\left\{\begin{array}{ll} J & 19239363 \\ j & 29730987 = \dfrac{13}{42}\text{ de }1^{o} \\ \hline & 48970350 \end{array}\right.$$

Le nombre des vaches est plus grand que celui des taureaux, tandis que c'est le contraire dans le calcul précédent.

Le changement le plus important est dans les vers 35 et 36 que M. Thieme lit et ponctue ainsi :

... Τὰ δ' αὖ περὶ μηκέα, πάντη
Πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.

Le sens est : Quant à ce qui concerne les côtés qui circonscrivent de toutes parts, les plaines de la Sicile étaient remplies de *briques*, c'est-à-dire que chaque côté du carré $B+N$ doit être un *nombre brique ;* de sorte qu'on doit satisfaire, dit M. Thieme, à ces équations

$$(B+N)x = 3828x$$
$$= \text{le carre d'un nombre brique} = y^2(y-z)^2,$$
$$(T+J)x = 2471x$$
$$= \text{un nombre triangulaire} = \frac{u(u+1)}{2},$$
$$(B+N+T+J)x = 6299x$$
$$= \text{un nombre triangulaire} = \frac{v(v+1)}{2}.$$

Pour satisfaire à la première équation, il faut que l'on ait

$$x = 1914r^2,$$

et, par conséquent,

$$4942.1914r^2 = u^2 + u,$$
$$12598.1914r^2 = v^2 + v.$$

Il est impossible de satisfaire simultanément à ces deux équations, mais la troisième équation n'est pas exigée.

La seconde équation donne un nombre indéfini de solutions; la première équation devient

$$3828\,r = y\,(y - z), \quad z = y - \frac{3828\,r}{y};$$

il suffit de prendre

$$y = r \quad \text{et} \quad r > 3828;$$

il y a donc une infinité de solutions.

M. Thieme croit que l'épigramme est d'Archimède, parce qu'elle est citée sous ce nom dans une scolie sur le *Charmide* de Platon et dans l'ouvrage de Héron d'Alexandrie sur la nomenclature des vocables géométriques. Ce sont de bien faibles arguments. M. Thieme tient de son collègue M. Molweide, que Gauss avait résolu le problème, mais en adoptant les énoncés du scoliaste et de ses interprètes; ces énoncés étant faux, à ce que pense M. Thieme, cette solution ne se rapporte pas à la pensée d'Archimède; c'est ce qui l'a engagé à ne pas s'adresser à Gauss pour demander sa solution. Cette abstention est regrettable.

Nous devons la communication de cette brochure et de l'opuscule de MM. Struve à M. Vincent, membre de l'Institut, qui fait un usage si libéral des ouvrages d'érudition qui composent sa précieuse bibliothèque.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

ὅπερ ἈΡΧΙΜΗΔΗΣ ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν τοῖς ἐν Ἀλεξανδρέια
περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν,
εν τῇ πρὸς ἘΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ τὸν ΚΥΡΗΝΑΙΟΝ.

ἐπιστολῇ.

Πληθὺν ἠελιοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον,
Φρόντιδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,

Πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σιχελῆς ποτ' ἐβόσχετο νησου
Θρινακίης, τετραχῆ στιφεα δασσαμένη,
Χροιὴν ἀλλάσσοντα· το μὲν λευκοῖο γάλακτος,
Κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
Ἄλλογε μὲν ξανθὸν, τὸ δὲ ποικίλον. Ἐν δὲ ἑκάστῳ
Στίφει ἔσαν ταῦροι πλήθεσι βριθόμενοι
Συμμετρίης τοιῆσδε τετευχότες. Ἀργότριχας μὲν
Κυανέων ταύρων ἡμίσει ἠδὲ τρίτῳ,
Καὶ ξανθοῖς σύμπασιν ἴσως, ὦ ξεῖνε, νόησον.
Αυτὰρ χυανέους τῷ τετράτῳ μερέι
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ, ἔτι ξανθοῖσι τὲ πᾶσι.
Τοὺς δ' ὑπολειπομένους ποικιλόχρωτας ἄθρεί
Ἀργεννῶν ταύρων ἕκτῳ μέρει, ἑβδομάτῳ τὲ,
Και ξανθοῖς αὖτις πᾶτιν ἰσαζομένους.
Θηλείαισι δὲ βουσι τά δ' ἔπλετο· λευκότριχης μέν
Ἦσαν συμπάσης κυανεης ἀγέλης
Τῷ τρίτατῳ τε μέρει καὶ τετράτῳ ἀτρεχὲς ἶσαι.
Αὐταρ κυάνεαι τῷ τετράτῳ τε πάλιν.
Μικτοχρόων καὶ πέμπτῳ ὁμοῦ μέρει ἰσάζοντο,
Σὺν ταύροις πασῶν εἰς νομον ἑρχομένων.
Ξανθοτρὶχων δ' ἀγέλης πέμπτῳ μέρει ἠδε και ἕκτῳ
Ποικίλαι ἰσάριθμον πλῆθος ἕχον ἀτρεκές (*).
Ξανθαὶ δ' ἠριθμευντο μέρους τρίτον ἡμίσει ἴσαι
Ἀργεννῆς ἀγέλης ἑβδομάτῳ τὲ μερέι.
Ξεῖνε, συ δ' ἠελοιο βόες πόσαι ατρεκες εἰπων.
Χωρὶς μὲν ταύρων ζατρεφέων ἀριθμόν,
Χωρὶς δ' αὖ θήλειαι ἴσαί κατὰ χρῶμα ἕκασται.
Οὐκ ἀιδρις κε λέγοι, οὐδ' ἀριθμῶν ἀδαής,
Οὐ μὴν πω γε σοφοῖς ἐναρίθμιας, ἀλλ' ἴθι φράζευ
Καὶ τάδε τάντα βοῶν ὑελίοιο πάθη.
Ἀργότριχες ταῦροι μὲν ἐπει μιξαίατω πληθὺν
· Κυανέοις ἵσταντ' ἔμπεδον ἰσόμετροι
Εἰσ βάθος εἰς εὖρος τέ τὰ δ' αὖ περιμήκεα πάντη
Πίμπλαντο πλίνθου Θρινακίης πεδία.
Ξανθοὶ δ' αὖτ εἰς ἕν και ποικίλοι ἀθροισθέντες

(*) Dans le manuscrit il y a τετραχῆ

Ἵσταντ' ἀμόολάδην ἐξενὸς ἀρχόμενοι
Σχῆμα τελειοῦντες τὸ τρικράσπεδον· οὔτε προσόντων
Ἀλλοχρόων ταυρων, οὔτ' ἐπὶλειπομένων.
Ταῦτα συνεξευρὼν καὶ ἐνι πραπίδεσσιν ἀθροίαας,
Και πληθέων ἀποδοὺς, ὦ ξένε, πάντα μέτρα
Ἔσχεο κυδιόων νικηφόρος· ἴσθι τε πάντως
Κεκριμένος ταύτῃ ὄμπνιος ἐν σοφίῃ.

Notes philologiques.

Πραγματευομένοις, le manuscrit a πραγματευμενοὶς

Vers 8. Il faut πλήθει.

Vers 13 et 21. Μίκτοχρόων, probablement des fautes d'impression; peut-être στὶκτοχρόων, pointillé, piqueté de diverses couleurs, tacheté.

Vers 14. Ποικὶλοχρωτας, c'est ainsi dans le manuscrit. Lessing a mal corrigé en écrivant ποικὶλοχρὸας, il ne s'est pas aperçu que c'est un vers pentamètre.

Vers 16. Αὐτίς; Lessing met αοτοῦς; probablement une faute d'impression.

Vers 22. Lessing met πλσὴς .. ερχομόνης.

Vers 23. L. αγελης; il faut δ'αγελης.

Vers 24. Lessing met εχον. τετραχῆ, ce qui ne présente pas de sens, car le vers finit au dernier mot; on propose de lire ατρεκης.

Vers 29. L. χροίαν.

Vers 31. L. ἐν αριθμοίς.

TRADUCTION.

Problème que, dans une lettre adressée à Ératosthène de Cyrène, Archimède a proposé à ceux qui s'occupent de ces matières à Alexandrie.

O ami! calcule-moi le nombre de bêtes à cornes de Hélios,
mais penses-y sérieusement si tu prétends à la science.
En quel nombre paissaient-elles dans les plaines de la Sicile,
l'île aux trois angles? Elles se partageaient en quatre troupeaux
divers en couleur. L'un était blanc comme du lait,
l'autre brillait d'une couleur noire,
un autre était jaune et encore un tacheté. Chaque troupeau
renfermait des taureaux en grand nombre et ils étaient
les uns aux autres dans ces rapports : I. Les blancs étaient autant
que la moitié et le tiers ensemble des noirs

plus tous les jaunes; ainsi remarque bien cela.
II. Ensuite les noirs égalaient la quatrième
et cinquième part des tachetés, plus encore tous les jaunes.
III. Considère les tachetés encore restants;
au sixième et au septième des taureaux blancs,
plus au nombre total des jaunes, ils sont égaux.
Il y a encore les vaches. IV. Les blanches
étaient du troupeau noir entier
exactement le tiers plus le quart.
V. Les vaches noires autant qu'un quart
et un cinquième de tout le troupeau tacheté,
lorsque ce troupeau paît ensemble avec les taureaux.
VI. Les vaches tachetées faisaient un cinquième plus un sixième
de toute la partie jaune.
VII. Les vaches jaunes autant qu'un demi-tiers
et un septième de toute la partie blanche du troupeau.
Ainsi, si tu me dis maintenant nettement le nombre des bêtes à cornes de
à part le nombre des taureaux bien nourris, . [Hélios,
à part les vaches et combien de chaque couleur,
on ne t'appellera pas maladroit ni inexpert dans les nombres,
cependant on ne te comptera pas encore parmi les savants. Car, viens
ce qu'on rencontrait chez les bêtes à cornes de Hélios. [et dis-moi encore
VIII. Si la foule des taureaux blancs se réunissait
aux noirs, ils présentaient une surface égale
en longueur et en largeur. Alors leur grande étendue
remplissait de son aire toutes les plaines de l'île aux trois angles.
IX. Ensuite, si les taureaux jaunes réunis aux tachetés
se formaient avec un en tête et croissaient successivement de un,
ils formaient la figure d'un triangle, sans qu'il y eût avec eux
des taureaux d'une autre couleur et sans remarquer leur abscense.
Si tu trouves cela et le mets dans ton esprit,
si tu peux, ô ami, indiquer la mesure de tous ces nombres,
alors avance glorieux, triomphant; sois convaincu
que tu es un homme accompli en cette science.

Note. Les chiffres romains indiquent les neuf conditions.

BIBLIOGRAPHIE DU JEU DES ÉCHECS.

Beaucoup de géomètres jouent aux échecs; tous du moins connaissent ce jeu, qui exige mentalement des solutions continuelles et successives de problèmes de la géométrie de situation (*).

Nous croyons que cette Note peut n'être pas sans intérêt et réclamons l'indication d'ouvrages omis, d'éditions omises et des renseignements divers.

1512. Damiano : Libro imparare Giuocase. Roma (italien et espagnol).

1551. Lopez : Libra de la invencion liberale y arte de juego del Axedres en A'cara.

1617. Selenus (Gustavus) : Das Schach und Königspiel. Leipzig; in-folio. Le nom véritable de l'auteur est Augustus Huneburgicius devenu duc de Wolfenbuttel, prince très-savant.

1663. Gustavus Selenus, id est Augustus herzog zu Braunschwey und lünen, Schach ader Königs-Spiel. Frankfurt, in-12.

1664. Christophorus Weickman : Neu erfundenes grosses Königs-Spiel, welches sich mit dem Schach-Spiel in etwas zwar verglicht, jedoch aber von demselben darin unterschieden, das vie jenes nor selb andern, dieses selb dritt, wiert, sechls und selbacht gesppieltwerden kann, etc. Grand jeu royal nouvellement inventé, qui ressemble en

(*) Les jeux de cartes ne sont que des combats de nombres de l'Arithmomachie. Remplacez les figures par des nombres et les couleurs par des indices, personne ne voudrait jouer.

quelque chose au jeu des échecs, mais en diffère en ce que celui-ci ne se joue qu'à deux, tandis que l'autre peut se jouer à trois, à quatre, à six et même à huit, etc. Ulm; in-folio.

1667. Carera: Del giuoco degli scacchi. Piossi.

1673. Holli : Osservationi teoriche pratiche sopra il giuoco degli scacchi. Bologna.

167.... Barbier: Game of Chess play, being a princely exercise, wherein the learner may profit more by reading this small book, than by playing a thousand matches Lond.; in-8.

1679. Palamedes redivivus, das ist, unterricht von dem stimm oder Schach-Spiel, Picquet-Spiel, und Thum-Spiel, Rumpfordnung und Regeln von Billard. Leipzig, 1679; in-12.

1694. Th. Hyde : De ludis orientalibus, lib. II. Oxonii; in-8.

1699. Greco (Calabrois) : Le jeu des échecs, traduit de l'italien. Paris.

1725. Joannis Rezzetti : Ludorum scientia. Venetiis; in-4°.

1737. Stamma : Essai sur le jeu des échecs. Paris.

1750. Dal Rio : Osservazioni pratiche sopra il giuoco degli scacchi. Modena.

1759. Euler: Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse sur la marche du cavalier sur l'échiquier (Mémoires de l'Académie de Berlin, tome XV, page 310).

1766. Cozio : Il giuoco degli scacchi; deux volumes. Torino.

1771. Vandermonde, Académie des Sciences, problème du cavalier, p. 566.

1773. Colini : Solution du problème du cavalier au jeu des échecs. Mannheim.

1775. *Voir* 1786.

1777. Philidor : Analyse du jeu des échecs. Londres.

1782. Pouziani : Il giuoco incomparabile degli scacchi. Modena.

1786. Traité théorique et pratique du jeu des échecs par une société d'amateurs. Paris. La première édition est de 1775.

1792. Zuyland de Niewelth : Supériorité aux échecs, mise à la portée de tout le monde; in-8.

1808. Sarrat : Treaties on the game of chess. London; deux volumes.

1811. Allgaico : Neue theorischeprackts che anweisung zum schachspiel. Wien.

1812. Anonyme : Il giuoco incomparabile degli scacchi. Venezia.

1817. Kenny's chess grammar. London.

1818. Chess exercise. London.

1818. The games of the match at chess played between the London and the Edinburgh chess club with back games.

1818. The games of the match, etc., with back games by the comity of Edinburgh.

1821. New treaties on the game of chess upon a plan of progressive improvement hitherto unattempted. London.

1822. Cochrane : A treaties on the game of chess. London.

1823. Nouvelle notation de parties et coups d'échecs, etc., par une société d'amateurs et Philidor. Paris; in-8.

1825. Anonyme : Studies of chess. London.

1825. Reinganum (Benoni) : Oder die Vertheidigungen gegen die gambitzuge. Francfort.

1826. Silberschmidt : Die neue endeckten geheimnisse im gebiethe des schachspiels. Braunschweig.

1826. Ciccolini : Del cavallo degli scacchi. Paris.

1829. Silberschmidt : Angriff in Vertheidigung gegen gambitzuge. Braunschweig.

1830. Problème du cavalier. Théorie des nombres de Legendre .3e édition. t. II, p. 151.

1831. Lewis: A series of progressive lessons on the game of chess. London.

1832. Lewis : A second series of lessons on the game of chess. London.

1832. Fift games at chess. London.

1833. L.-C. de la Bourdonnais : Nouveau traité du jeu des échecs; deux volumes (rare).

1833. G. Walker : A new treaties of chess. London.

1834. Philidor and his contemporaries. London.

1835. Chess made easy. London.

1835. Chess for beginners. London.

1836. Greenwood Walker : A selection of games at chess played in London by the late A. M. d'Ounel and de la Bourdonnais. London.

1837. The match played by the chess-club of Paris and Westminster. London.

1837. A. Alexandre : Encyclopédie des échecs, ou Résumé comparatif en tableaux synoptiques des meilleurs ouvrages écrits sur ce jeu par les auteurs français et étrangers tant anciens que modernes, mis à l'usage de toutes les nations par le langage universel des chiffres. Paris et Londres.

Format atlantique; les explications sont données en quatre langues : française, anglaise, allemande et italienne. Prix : 30 francs broché; et 36 francs cartonné.

184.... On the knights move at chess, Cambridge and Dublin mathemtic journal, 1re série. Vol III, page 333; par le révérend Moon.

1849. Introduction pratique au jeu des échecs, comprenant le Gomito de Damiano, l'Anonyme de Modène, la Centurie de Lolli, etc., publiée par Poirson, Prugneaux, Commercy; in-12.

1849. Kling (J) : The chess Euclid : a collection of 200 chess problems and end-games. In-8; with 26 pl.; London.

1836 à 1851. Le Palamède, revue mensuelle des échecs et autres jeux.

1re série, par M. de la Bourdonnais, de 1836 à 1840; 31 mois in-8 et 4 mois in-12.

2e série, par M. Saint-Amant, 1841 à 1847; in-8, grand raisin.

3e série, La Régence, faisant suite au Palamède 1849, 1850 et 1851. 3 vol. in-12.

1851 Volpicelli : Sur le problème du cavalier (*Comptes rendus des séances de l'Académie*, t. XXXI, p. 314).

1854. Sur le problème du cavalier au jeu des échecs (*Nouvelles Annales*, tome XIII, page 181).

.... Rabiano (comte de) : Les échecs simplifiés et approfondis, ouvrage entièrement neuf, dans lequel une théorie générale et facile ramène à l'unité rigoureuse les préceptes de détails, règles, etc., épars dans le traité in-8.

184.... Witcomb : Traité du jeu des échecs, par M. Lewis, traduit de l'anglais par H. Witcomb et arrangé selon le système lexicographique de M. Kieseritzky (*). In-8. (*Voir* 1831.)

1852. Ferdinand Minding : Sur la marche du cavalier (*Journal de Crelle*, t. XLIV, p. 73; en allemand).

(*) Mort à Paris en 1853 ou 1854.

PROBLÈME DE BOVINO (RECTIFICATION)

(voir page 119)

L'opuscule dont il est question (p. 119) est de M. Hermann (Godefroi) (*) et non de M. Edouard Thieme qui a seulement prononcé le discours d'apparat pour la solennité académique. C'est à l'obligeance de M. Vincent que je dois encore cette correction.

Nesselmann (G.-H.-F), dans son célèbre ouvrage sur l'histoire de l'Algèbre chez les Grecs (**), consacre les cinq dernières pages à notre problème. Adoptant l'opinion de Klügel et de S. Struve, il fait ressortir l'impossibilité d'attribuer une telle production à Archimède, et, d'après le mauvais goût que l'on remarque dans le style et la facture poétique, Nesselmann pense que cela peut être le travail d'un écrivain du XIV^e^ siècle, et même plus récent. Car Planude et Krephalas, auteurs du XIV^e^ siècle, qui recherchaient avec ardeur de semblables bagatelles, n'ont pas admis ce problème dans leurs collections. La huitième et la neuvième condition sont, selon l'opinion de MM. Hermann et Nesselmann, une superfétation faite postérieurement à la solution donnée par le scoliaste. Car cette solution est exacte pour les sept premières conditions et fausse pour les deux dernières, qui paraissent avoir été ajoutées par quelqu'un entièrement étranger à la science des nombres, et qui s'est amusé à proposer une difficulté dont il ne comprenait pas la portée. MM. Struve, Hermann, Nesselmann font à ce sujet des raisonnements sur l'étendue de la Sicile, sur le

(*) Voir *Bibliothèque des auteurs classiques grecs et romains*, par Guillaume Engelmann. Paris, 1847, in-8.

(**) *Die algebra der Griechen*. Berlin, 1842; in-8.

nombre des bêtes à cornes qu'elle peut contenir, nourrir, sur le rapport entre les bœufs et les vaches, etc. Comment des esprits aussi sérieux, aussi distingués, peuvent-ils se livrer à de semblables considérations à propos d'un badinage littéraire où l'auteur n'a eu pour but que de donner une forme dramatique à une question d'arithmétique (*) !

BIBLIOGRAPHIE.

Traité d'Arithmétique théorique et pratique en rapport avec les *nouveaux Programmes* d'enseignement, terminé par une petite Table de logarithmes disposée comme les Tables de Callet; chaque théorie est suivie d'un choix d'exercices gradués de calcul et d'un grand nombre de problèmes; par le P. *P. Faton*, de la Compagnie de Jésus. Paris, 1854; in-12 de VIII-328 pages. Avec l'épigraphe : *Deus scientiarum dominus est* (I Reg. II) (**).

L'auteur anonyme de l'ouvrage : *Arithmetices introductio ex variis authoribus concinnata*, 1546, in-4, a pris pour épigraphe le distique suivant :

Ingenuas ridens artes mercator avarus,
Negligit hanc minime, provenit unde lucrum.

En effet, ceux même qui font le moins de cas des arts libéraux, ne négligent pas la connaissance du calcul, autant qu'elle est nécessaire à leurs intérêts; ils cultivent volontiers les procédés sans s'enquérir des principes logiques. N'ayant égard qu'à ces dispositions mercantiles, les arithmétiques ont été dans le moyen âge purement *descrip-*

(*) Le catalogue imprimé (1740) des manuscrits de la Bibliothèque impériale porte l'épigramme *de bovino* sous le numéro 2448. Il y a peut-être des variantes. (Breton de Champ.)

(**) Chez Mallet-Bachelier. Prix : 2f 75c *tives* et les arithmétiques *raisonnées* ne commencèrent que vers la fin du XVII^e^ siècle. C'est une preuve évidente du progrès de l'esprit humain qu'aujourd'hui tous les Traités d'Arithmétique les plus usuels ont le caractère démonstratif. Toutes ces opérations, en dernière analyse, se réduisent à avoir des procédés pour compter, soit en avant, soit en arrière, le plus rapidement possible; les moyens logiques sont restreints, et il n'y a de diversité que dans l'exposition, dans l'ordre de succession.

A commencer par les définitions, nous croyons qu'en thèse générale il ne faut jamais définir un objet avant que le cours du raisonnement ait amené la nécessité de définir cet objet. D'après ce principe, les définitions que donne l'auteur dans son Introduction nous paraissent déplacées: *grandeur, continuité, discontinuité, entier, fraction*; toutes ces notions ne devraient apparaître que plus loin. *Unité* et *nombre* sont les deux seuls objets à définir. Ce n'est qu'après la division que se manifeste la nécessité de faire la distinction des entiers et des fractions. On a omis la définition de *compter*, définition capitale; toute l'arithmétique n'est que l'art de compter promptement en avant vers $+\infty$ (addition), en arrière vers $-\infty$ (soustraction) (*). Pour faciliter l'étude, on devrait mettre à la fin une table des objets définis avec renvoi aux pages du livre, et, pour le même motif, une table des principes et des théorèmes telle qu'elle a été donnée par Bezout et reproduite récemment dans la petite arithmétique de M. Rambosson.

Les quatre opérations sont si bien analysées, qu'il paraît impossible de ne pas comprendre; toutefois, on s'est trop étendu sur la division: l'exposition de M. Faucheux (*Nouvelles Annales*, p. 51) paraît préférable. Les exemples sont généralement bien choisis et souvent instruc-

(*) L'oubli de cette distinction a conduit M. Bertrand a introduire gratuitement dans l'Algèbre des *conventions* scabreuses (*Algèbre*, 2^e^ éd., p. 9).

tifs ; la divisibilité des nombres, si nécessaire à la théorie, est traitée avec soin, et on fait usage de notations littérales ; on aurait désiré y rencontrer la méthode des tranches (*Nouvelles Annales*, p. 118). Il paraît utile de faire précéder les fractions de quelques considérations sur les séries des nombres consécutifs fractionnaires, par exemple $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$, etc., $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, etc., et de montrer les termes égaux qui se rencontrent simultanément dans ces séries, ce qui conduit à la théorie des nombres premiers, etc. Le calcul décimal est la description de notre système métrique. On y fait l'observation instructive que la vraie mesure du mètre n'est pas $3^{\text{pieds}}\ 11^{\text{lignes}},296$, mais $3^{\text{pieds}}\ 11^{\text{lignes}},335$ ou bien $0^{\text{toise}},513118$. Dans un ouvrage uniquement destiné aux classes, est-il convenable de donner les mesures anciennes? C'est douteux. On aurait mieux fait de rejeter ceci à la fin et en petit texte.

L'exercice sur la longueur des ondulations lumineuses (p. 175) est-il bien adapté aux connaissances présumées des lecteurs?

Les fractions périodiques sont développées, selon l'importance du sujet, avec beaucoup de clarté. Le théorème de Fermat étant la base implicite de tout ce qu'on peut dire là-dessus, n'y aurait-il pas une économie de paroles à introduire ce théorème dans les éléments?

Le chapitre XI (p. 205) est consacré aux opérations abrégées et le chapitre XII aux approximations numériques. Il semble que le chapitre XII devrait précéder le XI^{e}. Les estimations de degrés d'erreurs sont l'âme du calcul pratique, qui roule toujours sur des données essentiellement affectées d'erreurs, et, soit dit en passant, toutes nos trigonométries sont défectueuses. Elles donnent des formules littérales sans nous apprendre les degrés d'erreurs des applications numériques. C'est ainsi que Gauss a trouvé que le *Thesaurus logarithmorum* de Vega renferme plus de cinq mille résultats *inexacts*.

Pour ces deux chapitres si importants, l'auteur a consulté l'ouvrage de M. Vieille : *Théorie générale des approximations*. L'ouvrage est cité p. 222 ; c'est une rareté *in regionibus nostris*.

La proportion géométrique, base des opérations commerciales, fournit de nombreuses applications. Les solutions reposent sur la méthode du baron Reynaud, la *réduction à l'unité*.

Aux pages 263 et 265, on parle de mélanges et d'alliages *directs* et *inverses*. En quoi consiste ici l'inversion?

On donne comme question (p. 280) la course entre Achille et la Tortue; question célèbre dans les annales de la philosophie et qui présente une difficulté réelle, lorsqu'on ne compare pas le *flux* simultané des deux continuités, extérieure et intérieure, *objective et subjective*, espace et temps; le *dx* et le *dt* fluent simultanément. C'est pour n'avoir pas fait cette comparaison que M. le docteur Beaux (Jean-Jacques) est parvenu à cette étrange assertion, que l'*espace* n'est pas divisible à l'infini (article *Atome* dans le *Dictionnaire de Médecine* de Nysten, 1814). Le chapitre des logarithmes est terminé par une Table de 1 à 4000 disposée comme celle de Callet. C'est une bonne idée. Nous recommandons comme modèle de simplicité, de rigueur, sans cesser d'être élémentaire, ce qu'on lit sur les logarithmes dans l'*Arithmétique* de Querret, ouvrage précieux, imprimé en province (Saint-Malo, 1822; in-8 de 292 pages) et très-rare à Paris (*).

(*) L'idee du *logarithme-limite* est très-commode. Du reste, comme nous verrons, la veritable nature du logarithme n'a ete connue que de Kepler. Tout logarithme est essentiellement *infini*. Le rapport de deux de ces infinis est *fini*

Dans deux pages (308-310), M. Faton donne une description claire et suffisante de la règle à calcul, instrument très-utile dans la vie domestique, commerciale, industrielle et d'atelier. Un moyen certain de déprécier cet instrument est d'en exagérer l'utilité et d'en vouloir préconiser l'emploi hors de ses limites naturelles. Par quelle fatalité ne pouvons-nous rien faire en France sans dépasser les bornes, sans pousser les meilleures choses jusqu'à ce qu'elles deviennent mauvaises?

Si nous avions l'arithmétique à enseigner, nous adopterions comme guide le Traité que nous venons d'analyser.

Invention nouvelle en l'Algèbre, par *Albert Girard*, mathématicien; tant pour la solution des équations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la perfection de ceste divine science. A Amsterdam, chez Guillaume Jansson Blaeuw; MDCXXIX; petit in-4.

Au milieu du titre est une sphère armillaire à axe incliné; à la droite de la sphère, on voit Hercule avec sa massue et la peau du lion de Némée; à gauche, le Temps avec sa faux. Au-dessous de la sphère on lit. Indefessus agendo.

L'ouvrage n'a aucune pagination. Au bas, le registre va de A en H; chaque lettre renferme huit pages. ainsi en tout soixante-quatre pages.

L'ouvrage est dédié à M. Henri de Bergaigne, capitaine d'une compagnie de cavalerie pour messeigneurs les Estats-Généraux des Provinces-Unies des Pays-Bas. Il dit qu'il lui offre trois petits Traités. Le premier est une briève introduction à l'arithmétique, et les deux autres contiennent quelques nouveautés en l'algèbre et la géométrie inconnues des modernes et des anciens.

Le premier Traité débute ainsi : *Complément mathématique. Les commencements de l'arithmétique. Praelation des nombres.*

1^re *masse.* Nombre, mil, milion, mil milions.

2^e *masse.* Bilion, mil bilions, milion de bilions, mil milion de bilions

3^e masse. Trilion, mil trilions, milion de trilions, mil milions de trilions.

4^e *masse.* Quadrilion, etc.

Chaque masse renferme douze chiffres. On voit que le bilion de Girard n'est pas le même que notre billion, de même le trilion, etc.

De là, il passe aux quatre *conjugaisons*. Dans la soustraction, le nombre supérieur est le *subject* et le nombre inférieur l'*exacteur*. Dans la division, il remarque que le diviseur étant 19, le chiffre du quotient est la moitié du premier chiffre à gauche du diviseur s'il est pair, et la plus grande moitié s'il est impair. Cela n'est pas exact. Le chiffre du quotient peut être aussi la petite moitié, par exemple dans $\frac{37}{19}$.

Comme préparation aux fractions, il indique comment on trouve le plus grand commun diviseur et le plus petit multiple de deux nombres donnés. Il donne en deux pages les quatre *conjugaisons* des fractions et finit par la règle de trois.

Il a les mots *numérateur* et *dénominateur;* ce sont, dit-il, les deux *notes*, note supérieure et note inférieure.

L'algèbre commence par les *caractères des puissances et racines*

(2), (3), (4) dénotent les puissances secondes, tierces, quartes, etc.

$\frac{3}{2}$ 49 dénote la puissance tierce de la seconde de 49 ou la racine carrée du cube de 49; *c'est toujours* 343.

Il ajoute: Comme $\sqrt{}$ est en usage, on le pourra prendre au lieu de $\frac{1}{2}$, et de même $\sqrt[3]{}$ au lieu de $\frac{1}{3}$, etc.; il indique aussi ce signe *œ*

Des caractères de conjonctions et disjonctions appelez signes.

$+$ s'appelle *plus*, vaut autant à dire que *et*, ou bien *encore;*

— ou $\div$ signifie *moins;*

$=$ *signifie différence entre les quantités* où il se trouve;

ff signifie *plus que*,

§ signifie *moins que*

Viennent ensuite les quatre conjugaisons des signes $+$ et $-$.

Tous les exemples sont numériques.

La racine carrée de $+9$ est $+3$ ou bien -3; la racine carrée de -9 est *indicible*.

Dans la division, Gilbert distingue deux sortes de quotients, par excès et par défaut. *Pour en donner matière d'exercices aux apprentifs,* il donne une Table d'exemples d'additions de radicaux carrés. Pour la division $\frac{a}{c+\sqrt{d}}$, il multiplie haut et bas par $c-\sqrt{d}$; il est inutile de répéter que ses exemples sont toujours numériques. De là il passe à l'*extraction des racines des multinômes radicaux* et d'abord des binômes. *Exemple.*

$$\sqrt{7+\sqrt{48}} = 2+\sqrt{3},$$

par la méthode en usage, sans explication. Il distingue avec Euclide six espèces de binômes conjoints $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ et six disjoints $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

Racine cubique d'un binôme. Il dit que sa *reigle* n'a encore été inventée par personne et que celle de Bombelli est fausse. Voici cette règle.

On a

$$(a + \sqrt{b})^3 = a^3 + 3ab + \sqrt{b}\,(b + 3a^2),$$

or

$$(a^3 + 3ab)^2 - [\sqrt{b}\,(b + 3a^2)]^2 = (a^2 - b)^3.$$

Ainsi, étant donné $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$, pour que l'extraction soit réalisable, il faut que $A^2 - B$ soit un cube parfait et que l'on ait

$$\sqrt[3]{A^2 - B} = a^2 - b\,;$$

c'est ainsi qu'on trouve

$$\sqrt[3]{72 + \sqrt{5120}} = 3 + \sqrt{5}.$$

Construction algébrique sur les questions.

Il représente l'inconnue par un petit cercle, ainsi

$$③ = x^3,$$

mais nous nous servirons toujours de la notation actuelle.

Pour donc résoudre une question, il faut la remettre en question de nombres abstract, sans parler (si on peut) de matière, comme d'escus, pieds, etc. Finalement, il y a la position, les conditions (dont la dernière fait l'équation si la question n'est défaillante), la réduction, puis la solution de l'équation ordonnée. Voyez les questions de Diophante, réduites en six livres dans l'Arithmétique de Stevin, qu'avons fait depuis peu réimprimer en l'an 1625, *avec quelques augmentations, corrections et explications.*

De la réduction algébrique. Il s'agit de la manière de préparer une équation, de faire disparaître les dénominateurs, les multiplicateurs, les radicaux, etc.; il renvoie pour cela à la page 250 de l'*Arithmétique* de Stevin, nouvelle édition, et se contente de donner le tableau suivant :

L'addition	sert contre	le désordre, redondance et défaut.
La soustraction	—	les fractions des nombres et des quantités en général.
La multiplication	—	des grands nombres, aussi des quantités.
La division	—	l'assymétrie et trop grande depression.
La puissance	—	les exaltations excessives des quantites.
L'extraction	—	l'intempérance des nombres seulement.
L'isomère		

Il n'explique que l'isomère.

Isomère. *On opère non-seulement par multiplication pour se dépestrer des fractions, mais aussi par division pour s'affranchir des grands nombres.*

Exemple :

$$x^3 \text{ esgale à } 1\,\frac{1}{2}\,x + 5;$$

on met les quantités *obmises*. Ainsi

$$x^3 \text{ esgale } 0.x^2 + 1\,\frac{1}{2}\,x + 5,$$

on écrit dessous les *proportionnaux*

$$1.2.4.8,$$

les produits sont

$$x \text{ esgale à } 6x + 40.$$

Exemple contre les grands nombres.

$$9x^2 \text{ esgale à } 72x + 1456,$$

on divise par les nombres proportionnaux

$$9 . 12 . 16,$$

les quotients sont

$$x^2 \text{ esgale à } 6x + 91,$$

où x vaut 13 et -7; il faut diviser par $\frac{9}{12}$ ou $\frac{3}{4}$. ainsi les solutions requises sont $17\frac{3}{2}$, *encor* $-9\frac{1}{3}$.

$$x^3 \text{ esgale à } 14x - \sqrt{228},$$

il y a *défaut des* x^2.

	x^3 esgale à	$0.x^2$ +	$14x$ —	$\sqrt{288}$
Divis. prop[aux]..	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{8}$
Quotients.....	x^3 esgale à		$7x$ —	6

la valeur de x vaut

$$1,$$
$$2,$$
$$-3,$$

lesquels, divisés par $\frac{1}{\sqrt{2}}$, donnent pour les valeurs requises

$$\sqrt{2},$$
$$\sqrt{8},$$
$$-\sqrt{18}.$$

Ces procédés reviennent à ceux qui sont en usage.

Il ne connaît pas le signe d'égalité et ne s'en sert jamais.

Des équations ordonnées. Quand il n'y a pas assez de conditions pour mener à une équation, la question est *défaillante* et recevra autant de solutions qu'on voudra, si l'on admet les *moins*, et, si l'on n'admet les *nullités* et les *moins*, elle sera plus *restrainte*. Si l'on peut résoudre la proposition sans se servir de toutes ces conditions, elle sera *excédente* et il faut *retrancher* la dernière condition, si elle répugne. Dans tout autre cas, la proposition sera *pleine et entière*. Une équation préparée, *preste à recevoir la dernière main*, est dite une équation ordonnée.

Par exemple,

$$5x^2 = 18x + 72,$$

il résout à la manière ordinaire et trouve pour valeurs 6 et $-\frac{12}{5}$.

Notez aussi qu'où les ⓪ (c'est ainsi qu'il désigne les quantités toutes connues) *sont* —, *il y a plus de solutions par + qu'autrement, et ce en toutes les équations : or les solutions par — ne se doivent omettre.*

On voit que Girard savait que lorsque le dernier terme tout connu de l'équation est négatif, il y a des racines positives. Il n'emploie pas les mots *positifs, négatifs.*

$$x^3 = 6x + 40,$$

$$x = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4,$$

il suit la règle de Cardan, sans citer; ne donne pas les deux autres racines.

$$x^3 = 13x + 12,$$

solution par la Table des sinus; donne les trois racines

4, — 3, — 1 ; indique une construction géométrique qui n'est autre que la trisection de l'angle, et prend une certaine quantité comme *raid* (rayon).

$$x^3 = 30x - 36,$$

quantité connue négative; il dit que le moyen de solution est le même ; les trois racines sont :

$$-6, \quad 3+\sqrt{3}, \quad 3-\sqrt{3}.$$

Il s'étend beaucoup sur divers cas de solutions; le suivant est le plus remarquable et s'applique aux solutions entières. Soit

$$x^3 = 7x - 6, \quad x^2 = 7 - \frac{6}{x},$$

il cherche les diviseurs de 6; et c'est la méthode encore en usage. Chez lui les diviseurs sont des *efficients*.

$$x^3 = 3x - 1;$$

par l'isomère, on amène celle-ci à

$$x^3 = 300x - 1000;$$

la racine est entre 15 et 16, donc la racine cherchée est entre $\frac{15}{10}$ et $\frac{16}{10}$.

Girard donne ensuite *douze définitions* relativement aux signes, aux coefficients et au rapport des termes des équations, définitions qui lui servent dans l'énoncé de ses théorèmes. Dans la onzième définition, il nomme *première faction* la somme de plusieurs nombres pris un à un, *deuxième faction* la somme des mêmes nombres pris deux à deux, et ainsi de suite.

La douzième définition explique le triangle arithmétique, qu'il nomme *triangle d'extraction*, probablement parce qu'il sert à l'extraction des racines.

Premier théorème. La multitude des produits dans une faction peut s'exposer par le triangle d'extraction; c'est-à-dire, selon nos notations, le nombre de produits différents de m lettres prises n à n est

$$\frac{m(m-1)\ldots m-n+1}{1.2.3\ldots n}$$

Deuxième théorème, exprimé selon le langage actuel. Une équation a autant de racines qu'il y a d'unités dans le plus haut exposant; le coefficient du second terme, pris avec un signe contraire, est égal à la somme des racines; le coefficient du troisième terme pris avec son signe, etc.

Girard laisse le premier terme dans un membre et place tous les autres termes dans l'autre membre, ce qui l'oblige, pour énoncer son théorème, à faire beaucoup de distinctions. Il montre que son théorème subsiste même avec des racines imaginaires, par exemple

$$x^4 = 4x - 3,$$

les racines sont

$$1, \quad 1, \quad -1+\sqrt{-2} \quad -1-\sqrt{-2}$$

Il connaît les racines égales.

On pourrait dire: A quoi sert ces solutions qui sont impossibles? Je réponds: Pour trois choses: pour la certitude de la reigle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité.

Il apprend à former une équation correspondante aux factions données, mais il ne faut pas confondre les *meslés* (combinaison) avec la somme des puissances des solutions (racines). Soient

A premier meslé,
B deuxième meslé,
C troisième mesle,
D quatrième meslé,
etc.;

on a

A	sera la somme des solutions	
$A^2 - 2B$	—	carres.
$A^3 - 3AB + C^3$	—	cubes.
$A^4 - 4BA^2 + 4AC + 2B^2 - 4D$	—	carrés-carres.

Pas plus loin que les bicarrés.

Ces théorèmes et ces formules sans démonstrations : il est évident que Girard avait des démonstrations.

Connaissant une solution, il indique le moyen de trouver les coefficients de l'équation débarrassés de cette solution. Il n'a pas recours à la division; uniquement à la composition des coefficients qu'il nomme les *meslés*.

Jusques icy nous n'avons encore expliqué à quoy servent les solutions par — quand il y en a. La solution par — s'explique en géométrie en rétrogradant, et le — recule là où le + avance.

C'est la première trace d'une interprétation géométrique des quantités négatives; la géométrie de Descartes n'a paru qu'en 1637.

Problème d'inclinaison. ABOF est un carré donné, $AB = 4$. Il s'agit de mener par le point A une droite ANC de manière que la droite NC, interceptée dans l'angle droit adjacent à O, soit égale à $\sqrt{153}$. On demande la longueur de FN.

Solution. Soit

$$FN = x;$$

sans dire comment, il dit qu'on a l'équation

$$x^4 = 8x^3 + 120x^2 + 128x - 256,$$

les quatre valeurs sont

$$1,\ 16,\ -4\tfrac{1}{2} + \sqrt{4\tfrac{1}{4}},\ -4\tfrac{1}{2} - \sqrt{4\tfrac{1}{4}}.$$

N est entre F et O; il porte FN $= 1$, FD $= 16$ du même côté et les deux autres dans le sens opposé. Les données sont choisies de manière à avoir des racines rationnelles, ce qu'on ne fait pas dans les traités modernes qui tous ont adopté cet exemple.

Des postposées quantités en Algèbre. Ce titre obscur renferme la résolution de cette équation

$$xy = ay + b,$$

d'où

$$y = \frac{b}{x - a}.$$

Il énonce ici six théorèmes de l'*Arithmétique* de Stevin, dont je ne puis deviner le sens, n'ayant pas cet ouvrage à ma disposition; ils sont relatifs à la trigonométrie, il y est question de *sécante*.

C'est pour n'avoir pas connu ce mode de solution, dit Girard, que Cardan et Stevin ont donné, souvent sans nécessité, des solutions embarrassées. Il choisit pour exemple une question qui mène aux équations suivantes:

$$x + y + z = 26,\quad y^2 = xz,\quad z^2 = 2yz + 6z$$

C'est icy où ils se sont arrestez, mais nous achèverons et nous passerons à travers ce nuage.

Par voie d'élimination, il trouve

$$x = 2,\quad y = 6,\quad z = 18$$

Après ce problème, on lit : *Fin de l'Algèbre*, au bas de la page, recto. Sur le verso, on lit : *De la mesure de la superficie des triangles et polygones sphériques, nouvellement inventée par Albert Girard.*

Il dit qu'il va découvrir des choses qui n'avaient jamais été *cogneues*, sinon avant le déluge (*).

Il commence par faire des réflexions judicieuses sur l'emploi des mesures. Le *pied* sert à mesurer lignes, aires et solides ; mais ce mot *pied* ne conserve pas même signification : c'est successivement un pied linéaire, superficiel, solide ; de même le mot *degré*, quand il s'agit d'un arc, est un degré circulaire, et quand il s'agit d'un angle, c'est un degré angulaire. Il donne une plus grande extension à ce mot *degré* et s'en sert pour mesurer des angles solides et des aires sphériques ; à cet effet, il suppose que l'angle solide trirectangle a 90 degrés ; les huit angles solides qu'on obtient par le prolongement des faces, remplissant tout l'espace, contiennent 720 degrés. Assignant autant de degrés à l'aire de la sphère, alors toute aire sphérique peut être exprimée en degrés, minutes, secondes, etc. Il adopte ces nombres, dit-il, parce que la circonférence est divisée en 360 parties égales ; mais il aurait mieux valu adopter la division par *dixme*.

Il procède ensuite à des définitions et à des propositions que nous allons rapporter dans le même ordre, mais avec les notations modernes.

Définitions. Cercle *majeur, mineur ;* grand cercle et petit cercle de la sphère ; *fibule* = triangle sphérique ayant deux côtés chacun de 90 degrés.

Lemme I. ABC *étant un triangle sphérique et* A *le pôle cercle* BC *majeur ou mineur, l'aire* ABC *est à l'aire*

(*) Il paraît que Girard admet avec Stevin qu'il a existé avant le déluge un peuple très-sage, très-instruit, très-heureux. Opinion poetique.

enlevée par le cercle BC *comme l'angle* A *à quatre droits.*

LEMME II. a *et* b *étant deux angles moindres chacun qu'un quadrant, on a*

$$\frac{\text{tang}\, a}{\text{tang}\, b} > \frac{a}{b}, \quad \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b};$$

*il démontre la première inégalité et, pour la seconde, il s'en réfère à la fin du chapitre IX du livre Ier de l'*Almageste *et au théorème VI du livre Ier de* Copernique *en ses Révolutions.*

LEMME III. *La* somme *des angles intérieurs d'un polygone rectiligne est égale à autant d'angles droits que le double du nombre des côtés moins* 4.

THÉORÈME. *Tout polygone sphérique compris d'arcs de cercles majeurs tient autant de degrés superficiels que la somme de tous ses angles intérieurs excède la somme des angles intérieurs d'un polygone rectiligne de même nom, quand la superficie de la sphère est posée estre de* 720 *degrés superficiels.*

Suivent des explications numériques sur le triangle, l'heptagone. *OEil* et *yeux* au pluriel, dénomination pittoresque, est ce que nous appelons *fuseau*. Soit un *œil* de 30 degrés; l'aire est de 60 degrés superficiels, car le polygone rectiligne de même nom est *biligne* et n'est pas *polygone*. Il ne faut donc rien ôter de 60 degrés.

Ainsi le théorème subsiste pour les *yeux*.

Ce sont de simples énoncés; les démonstrations sont plus loin.

Mixte = triangle sphérique formé par deux arcs de grands cercles égaux et par un petit cercle.

Aire du mixte. Soit ABC un triangle mixte, AB = AC, et BC un petit cercle. Si l'on pose le rayon égal à 1, on aura

$$\text{aire ABC} = \text{A sin verse AB.}$$

Girard ne suppose jamais le rayon (*raid*) égal à 1.

Soit

$$\text{AB} = 36^\circ\,52', \quad \text{A} = 15^\circ,$$

$$\text{sin verse AB} = \frac{1}{5} \text{ environ},$$

donc

$$\text{aire ABC} = \frac{1}{120} = 3^\circ \text{ environ}.$$

Problème. *Construire un triangle sphérique rectangle équivalent à ce mixte et ayant même angle* A.

Solution. Soit ADE ce triangle,

$$\text{A} = 15^\circ, \quad \text{D} = 90^\circ;$$

de là, d'après le théorème, on conclut qu'on doit avoir $\text{E} = 78^\circ$, car

$$90 + 78 + 15 - 180 = 3.$$

Par les formules de la trigonométrie sphérique, Girard calcule les côtés et trouve

$$\text{AE} = 37^\circ\,59';$$

ainsi

$$\text{AE} > \text{AB} \quad \text{et} \quad \text{AD} = 36^\circ\,33', \quad \text{aire AD} < \text{AB}.$$

$$\text{DE} = 9^\circ\,4';$$

les 15 degrés du petit cercle BC ne valent que 9 degrés environ d'un grand cercle. Ainsi $\text{BC} < \text{DE}$.

Proposition. *Un triangle sphérique de trois arcs majeurs tient autant de degrez de superficie, que l'excez des trois angles sur* 180 *degrez*.

I. *Démonstration particulière ès fibulles*. Soit la fibulle ABC, $\text{AB} = 90^\circ$, $\text{AC} = 90^\circ$; la somme des trois angles est $180° + A$; donc, d'après le théorème, l'aire ABC égale A, ce qui est évident.

II. *Démonstration ès triangles rectangles sphériques ayant un chacun costé défaillant : en conclusion probable.*

Défaillant = aigu; *conclusion probable.* Girard ne donne pas sa démonstration comme rigoureuse.

Soit BDN un triangle sphérique rectangle en N, prolongeons BD en Q et BM en C, de manière qu'on ait $BDQ = BNC = 90°$; l'arc CQ mesure l'angle B. Prolongeons CQ en R de manière que $CQR = 90°$, on aura $RQ < D$, car $D > 90° - B$; portons l'arc qui mesure D de R en F de sorte que l'on ait

$$RQF = D, \quad QF = B + D - 90°, \quad CF = 90° - D;$$

ainsi, si le théorème est vrai, QF représente en degrés superficiels l'aire du triangle BDN.

Posons

$$BD = n, \quad DN = b, \quad NB = d,$$

$$\sec n = \operatorname{tang} B \operatorname{tang} D;$$

d'après le lemme II,

$$\frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang} 90° - D} > \frac{B}{90° - D};$$

donc

$$\sec n > \frac{B}{90° - D}, \quad \cos n < \frac{90° - D}{B};$$

$$\cos n = \sin DQ, \quad \sin DQ < \frac{90° - D}{B}.$$

Augmentons l'arc QD,

$$QDG = QD + DG = 90° - n + \nu,$$

tel que

$$\sin 90^\circ - n + \alpha = 0 = \cos(\alpha - a) = \frac{90^\circ - D}{B} = \sin QDG,$$

G tombe entre D et B.

$$\text{séc}\, d = \sin B \, \text{séc} D.$$

Par le lemme II,

$$\frac{B}{90^\circ - D} > \frac{\sin B}{\sin 90^\circ - D}, \quad \frac{B}{90^\circ - D} > \text{séc}\, d,$$

$$\cos d > \frac{90^\circ - D}{B}, \quad \cos d = \sin CN;$$

donc

$$\sin CN > \frac{90^\circ - D}{B}.$$

Diminuons l'arc CN,

$$CP = CN - NP = 90^\circ - d - \beta,$$

et tel que

$$\sin(90^\circ + \beta) = \cos(d + \beta) = \frac{90^\circ - D}{B} = \sin CP.$$

Le point T tombe entre C et N;

$$d + \beta = \alpha - n,$$

donc

$$a - n > d, \quad BG > BN, \quad BG = BP.$$

Si donc, du point B comme centre et d'un rayon sphérique BG, on décrit un arc GP, contenu dans l'angle B, le point P tombe entre N et C.

L'aire du mixte

$$BGP = B \sin \text{verse},$$

$$BG = B \sin \text{verse}\, \alpha - n = B[1 - \cos(\alpha - n)]$$
$$= B + D - 90^\circ = QF;$$

or *l'arc* GP *croisant toujours l'arc* DN, *l'aire du mixte* *est équivalente à celle du triangle* BDN. Donc l'aire de ce triangle est CF ou B + D + 90 — 180 ; ce croisement est la seule raison que Girard allègue. Aussi il regarde cette raison comme donnant une probabilité et non comme démonstrative. Il finit même par dire : *Notez que j'ai esprouvé en deux divers exemples, que* GD *estoit plus que double à* NP, *etc.* Il a dû recourir à un moyen empirique.

Il serait intéressant d'avoir une démonstration rigoureuse de l'équivalence des aires BDN et BGP, bien entendu, sans connaître l'aire de BDN, puisque cette équivalence doit servir à trouver cette aire.

III. *Démonstration en tous triangles sphériques.* Il décompose chaque triangle en deux triangles rectangles.

IV. *Démonstration de tous les polygones sphériques.* Il les décompose en triangles. Il termine par ces paroles remarquables auxquelles on n'a pas fait attention :

Mais le lecteur se contentera présentement de la démonstration contingente, jusques à ce qu'ayant plus de loisir, je la donne à sa perfection.

De la mesure des angles solides lesquels sont circuits de superficies planes. Pour faire cela, on mesure les inclinaisons des plans, on les ajoute ensemble, et de la somme on retranche la somme des angles d'un polygone rectiligne de même nom que la base. C'est ici la première idée de la mesure d'un angle solide. Il indique la mesure des angles solides des secteurs sphériques, et l'ouvrage est terminé par la mesure de l'angle solide d'un cône isocèle.

On voit, d'après ce résumé, que Girard a le premier :

1°. Fait connaître les relations combinatoires entre les coefficients des équations et des racines, ordinairement attribué à Newton ;

2°. Donné l'interprétation des racines négatives, ordinairement attribué à Descartes.

3°. Fait sentir l'utilité des racines imaginaires ;

4°. Donné des formules pour les sommes des puissances des racines ;

5°. Donné l'aire du triangle et des polygones sphériques ;

6°. Donné la mesure des angles solides.

Girard doit être placé au premier rang parmi les grands géomètres du XVII^e siècle, ce qui ne l'a pas empêché de mourir en 1638 dans un état très-voisin de la misère.

L'*Invention nouvelle, etc.*, est un ouvrage excessivement rare. Il n'existe pas dans les bibliothèques publiques de Paris. J'en dois la communication à l'obligeance de M. Chasles (*).

NOTE HISTORIQUE SUR L'AIRE DU TRIANGLE SPHERIQUE.

(Extrait d'une Lettre de M PROUHET)

Lagrange dit au sujet de ce théorème (*Journal de l'École Polytechnique*, p. 275, 1798) :

« On l'attribue communément à Albert Girard qui
» l'énonce, en effet, dans l'ouvrage intitulé *Invention*
» *nouvelle en l'Algèbre*, et imprimé à Amsterdam en
» 1629 ; mais comme la preuve qu'il en donne n'est pas
» rigoureuse et qu'elle ne peut pas même être regardée
» comme une induction, on devrait plutôt l'attribuer à
» Cavaleri qui l'a donnée dans le *Directorium generale*
» *uranometricum*, imprimé à Bologne en 1632, avec la
» belle démonstration rapportée par Wallis et insérée
» depuis dans la plupart des trigonométries. »

(*) Il l'a trouvé dans un paquet de livres qu'il a fait venir en bloc d'Allemagne

On doit ajouter que Girard ne donne pas sa démonstration comme rigoureuse, mais comme une probabilité provisoire et promettant une démonstration rigoureuse.

Euler a rapporté la démonstration de Girard dans son Mémoire *De mensura angulorum solidorum acta*, Ac. Sc. Petrop. pro 1778, pars posterior, p. 33, et le nomme *acutissimum geometram*.

Evidemment Euler n'a pas lu l'ouvrage de Girard. Il lui attribue une démonstration que l'on doit à Cavaleri.

Le titre complet de l'ouvrage de Cavaleri est :

Directorium generale uranometricum in quo trigonometriæ logarithmicæ fundamenta ac regulæ demonstrantur, astronomicæque supputationes ad solam fere vulgarem additionem reducentur, opus utilissimum astronomis, arithmeticis, perspectivis, architectis principue militaribus, mechanicis, geographicis, nec non ipsis philosophis naturalibus; authore Fr. Bonav. Cavalerio, Mediolanensi ordinis Jesuatorum S. Hieronymi, priore titulati ac in almo Bononiensi gymnasio primario mathematicorum professore. Bononiæ, 1632; in-4.

L'ouvrage est composé de trois Parties :

1re. Introduction historique, notions préliminaires sur les lignes trigonométriques et les Tables de logarithmes;

2e. Trigonométrie rectiligne;

3e. Trigonométrie sphérique.

L'ouvrage est suivi d'une Table de sinus et d'une Table de logarithmes des nombres de 1 à 10000.

Le théorème sur l'aire du triangle sphérique est donné dans la troisième Partie, chapitre VIII, page 315.

Après quelques mots sur la nouveauté et l'utilité de l'invention, il ajoute cette singulière comparaison :

Pulcherrimum igitur hoc inventum alus quoque communicandum esse censui, illudque hoc postremo capite non incongrue fuit reservatum, quo sublatis dapibus qui-

bus in mensa communiter vesci consuescimus, hi ex-empta fames novo hoc cibo restituta, famelici potius quam saturi ab astronomica mensa decedamus.

Cette métaphore culinaire a été reproduite dans le titre suivant : *Freundschaftliche Bewirthung meiner mathematischen Bruder mit einem Traetament von sechs geruchten, oder curieusê math. aufgabe nebst ihren auflosung.* Hospitalité amicale offerte à mes frères en mathématiques ; repas en six plats, ou problèmes de mathématiques curieux avec leurs solutions, par Jacques Jacobsen. Sleswig, 1790 ; in-8

Cavaleri (B.) est né à Milan en 1598. Il entre dans l'ordre des Jésuates (*), s'adonne aux mathématiques, devient élève de Galilée, se distrait de violentes attaques de goutte par l'étude, et meurt le 3 décembre 1667.

BIBLIOGRAPHIE

Licence es Sciences Mathématiques. — Résolution des questions relatives a l'épreuve pratique, d'après le *Programme officiel* du 20 avril 1853 ; par *E. Reynaud*, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, 1855, in-8 de VII-120 pages.

L'auteur a résumé en ce petit nombre de pages les solutions de trente-huit questions les plus difficiles de la partie mathématique du programme de la licence. On y

(*) Fondé pour des frères lais au XIV^e siècle, devient un ordre régulier, porte le nom des Hiéronymites de son patron saint Jérôme, fut supprimé en 1668.

trouve les formules de résolution, l'exposition des théories qui servent à établir ces théorèmes.

Les dix premières questions concernent l'enseignement des lycées. Nous signalons la cinquième question relative à la recherche d'une racine réelle d'une équation transcendante par la méthode des différences ; vu l'exigence du moment et la pénurie des moyens, cette indication est précieuse. Les questions 12 à 26 se rapportent à la mécanique rationnelle et pratique. Pour cette dernière, on a résumé les formules répandues dans les ouvrages de MM. Poncelet, Morin ; bien entendu que ces calculs supposent des connaissances physiques comme préliminaires. L'astronomie sphérique, planétaire, stellaire est l'objet des questions 26 à 38 Dans la question 34, on établit les relations entre l'ascension droite, la déclinaison, la longitude et la latitude d'un astre, ayant égard à la précession, la nutation et l'aberration.

En traitant dans les colléges des changements de coordonnées linéaires et polaires, il serait convenable d'apprendre aux élèves les noms que portent ces changements chez les astronomes ; cela donnerait quelque intérêt à ces opérations et préparerait aux études astronomiques. Plusieurs de ces questions auraient pu être simplifiées d'après les travaux consignés dans les *Astronomischen nachrichten* (*), journal qu'il est désormais indispensable de consulter en écrivant sur l'astronomie. Ce journal et celui de M. Crelle sont deux monuments impérissables que l'Allemagne élève à la science. Quand connaîtrons-nous les travaux de Hansen, Encke, Brunow sur le calcul des perturbations planétaires ? Combien de temps resterons-nous encore le seul peuple civilisé qui soit

---

(*) *Voir* l'excellent Mémoire de M. Goetz, n° 755, t. XXXII, p. 144 1851 privé d'un journal d'astronomie? C'est une manière de se distinguer qui n'est pas très-flatteuse.

M. Reynaud a voulu faire un travail utile. Le but est atteint.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE, par *S.-F. Lacroix*, membre de l'Institut. Dix-septième édition, rédigée conformément aux *Programmes* de l'enseignement scientifique dans les Lycées, par M. *Prouhet*, professeur de mathématiques (*).

Les géomètres éminents de l'école des Lagrange et des Laplace n'ont pas dédaigné de descendre de temps en temps des hautes régions de l'analyse dans le champ plus modeste des éléments de la science. C'est là, dans les éléments, que leur esprit a dû s'exercer non plus à résoudre des problèmes d'un ordre plus ou moins élevé, mais à former une classification méthodique et lumineuse des vérités simples et fondamentales, base du vaste édifice de la science des grandeurs. A côté du *Traité des fonctions elliptiques* et du grand *Traité de calcul infinitésimal*, figurent deux ouvrages élémentaires de géomètres auxquels s'attachent respectivement, comme aux précédents, les noms de Legendre et de Lacroix, et peut-être que ces livres élémentaires ont présenté à leurs auteurs des difficultés non moins grandes que celles qu'ils on eu à vaincre, de diverses manières, dans une sphère plus élevée. Depuis, on ne s'est jamais sensiblement écarté de la marche suivie par ces illustres maîtres. Le groupement général des théories partielles, adopté par Legendre, a peut-être constamment prévalu, mais pour ce qui est de l'exposition en elle-même, il est facile de reconnaître que les procédés de Lacroix sont plus empreints de cet esprit

---

(*) In-8, avec figures dans le texte. Chez Mallet-Bachelier, libraire. Prix 4 francs.

d'analyse qui est dans la nature des choses et qui fait passer sans effort d'une vérité à une autre successivement plus complexe. L'expérience et la nécessité des temps ont fait sentir le besoin d'introduire dans l'enseignement un ordre uniforme et déterminé. L'ouvrage de Lacroix devait, en conséquence, recevoir en certains points une distribution différente des matières et dans d'autres quelques développements que l'auteur avait négligés. M. Prouhet s'est chargé de ce double soin. La dix-septième édition de la *Géométrie* de Lacroix qui vient de paraître a été divisée en quatre Parties. La première Partie comprend toute la géométrie plane, c'est-à-dire ce qui se rapporte à l'enseignement de la classe de troisième (sciences). La deuxième répond à l'enseignement de la classe de seconde et comprend conséquemment les propriétés générales de la géométrie de l'espace. Dans la troisième Partie on trouve le complément de ces propriétés en vue de la classe de spéciales. Enfin la quatrième Partie renferme les notions sur les courbes usuelles qui sont destinées à la classe de rhétorique.

Les énoncés du Programme officiel sont intercalés dans le texte, de façon que les leçons se trouvent distribuées dans leur ordre naturel. Il en résulte une économie de temps pour l'élève qui se trouve par là dispensé d'aller rassembler les fragments épars d'une même théorie.

On connaît le mode d'exposition clair, précis et simple qui caractérise les écrits de Lacroix. Dans les endroits, peu nombreux, il faut le dire, où il est devenu indispensable d'introduire quelques nouveaux développements, M. Prouhet s'est montré pour le fond et pour la forme le digne émule de l'illustre auteur. L'ouvrage forme ainsi un tout parfaitement homogène, et, en le livrant à la publicité, M. Prouhet a rendu un véritable service aux élèves et aux professeurs.

Aujourd'hui les livres élémentaires pullulent en quelque sorte. Il semble malheureusement que leur valeur moyenne diminue proportionnellement à leur nombre. On doit donc regarder comme une bonne fortune la réapparition, sous une forme plus appropriée aux besoins actuels, de l'œuvre de l'un des hommes qui ont le plus profondément et le plus efficacement médité sur la philosophie de l'enseignement.

Je dois ajouter en terminant que l'éditeur, M. Mallet-Bachelier, a pris un soin particulier de la partie typographique.

E. COMBESCURE.

TABLES DES LOGARITHMES ET CO-LOGARITHMES DES NOMBRES ET DES LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES, disposées de manière à rendre les parties proportionnelles toujours additives, suivies d'un Recueil de *Tables astronomiques et nautiques*; par *V. Caillet*, examinateur de la Marine, ancien professeur d'astronomie et de navigation aux Écoles Navale et d'Hydrographie. Paris, Mallet-Bachelier, Robiquet, édition stéréotype, 1854. Grand in-8 de 331 pages; 47 Tables.

Du moment qu'une question est ramenée au calcul numérique, tout ouvrage qui permet une plus grande rapidité dans l'exécution rend service à la science. De ce nombre est l'ouvrage dont nous allons rendre compte. Composé de quarante-sept Tables, il contient les principales Tables nécessaires au calculateur, à l'astronome et au navigateur. La première Table contient une série de quelques nombres usuels avec leurs logarithmes dont l'emploi simplifie les calculs. La seconde Table donne les mêmes expressions pour tous les nombres, et, dans le cadre, trois colonnes de divisions de la circonférence décuples les unes des autres. Une colonne de parties proportionnelles est jointe aux logarithmes. L'auteur donne une règle pour rendre les parties proportionnelles toujours additives, règle dont l'emploi est surtout commode, dans la Table III des lignes trigonométriques qui sont données de 15 en 15 secondes.

On prend toujours le logarithme inférieur à celui que l'on cherche, et si l'argument et le logarithme croissent dans le même sens, on lit la partie proportionnelle à gauche, et à droite de la page en cas contraire. Comme dans les grandes Tables de l'Observatoire, on donne en outre les cinq premiers degrés des logarithmes de $\frac{\sin a}{a}$ et $\frac{\tang a}{a}$ qui, se suivant d'unités en unités, ne nécessitent pas d'autre solution. De manière que pour avoir le logarithme de $\sin a$ ou de $\tang a$, il suffit d'ajouter le logarithme de l'arc pris dans la Table II à celui du rapport.

La Table IV, qui sert aux marins à faire le point, peut servir aussi à résoudre rapidement les triangles rectangles; elle donne ces deux formules,

$$b = a \cos C \quad \text{et} \quad c = a \sin C.$$

La Table V contient la latitude croissante sur l'ellipsoïde terrestre en prenant l'aplatissement égal à $\frac{1}{103}$; elle est calculée par la formule

$$L_c = \frac{10800'}{\pi M} \log \tang \left(45^\circ \frac{L}{2}\right)$$
$$- \frac{10800'}{\pi} \left(e^2 \sin L + \frac{e^4 \sin 3L}{3}\right).$$

Les autres Tables sont spéciales à l'astronome ou au navigateur. Parmi celles-ci, quelques-unes sont nouvelles et d'autres sont publiées pour la première fois en France. La Table X, qui sert à résoudre immédiatement un triangle, connaissant un côté adjacent à deux angles, est très-commode dans les atterrissages.

Les Tables XI et XII, qui permettent de déterminer à quelle distance on se trouve d'un objet dont la hauteur est connue, sont nouvelles en France. Par leur étendue, elles facilitent singulièrement les moyens de vérifier les chronomètres lorsqu'on est en vue de terre

Le moyen le plus juste et le plus constamment employé à la mer pour déterminer la latitude est la hauteur méridienne du soleil. Quand il arrive que cet astre n'est pas visible à cet instant précis, le navigateur est obligé d'employer d'autres méthodes longues et moins exactes; parmi celles-ci, la méthode des circumméridiennes est la meilleure. Elle donne la quantité à ajouter à une hauteur pour la rendre méridienne. Delambre a calculé des Tables pour faire ce calcul 16 minutes avant ou après midi. La correction est celle-ci :

$$x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} P}{\sin 1''} \left(\frac{\cos L \cos d}{\sin (L - d)}\right) - \frac{1}{2} \cot (L - d) \sin 1'' \times 1^{\text{er}} \text{ terme},$$

P étant l'angle horaire, L la latitude estimée, d la déclinaison.

La Table XL donne

$$\log \left[\frac{\cos L \cos d}{(\sin (L - d)}\right]$$

Dans la Table XLI, poussée jusqu'à 30 minutes, on trouve les valeurs des deux coefficients m et n nécessaires pour le calcul *comméridien*

$$m = \frac{2 \sin \frac{1}{2} P}{\sin 1''} \quad \text{et} \quad m = \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} P}{\sin 1''}$$

la deuxième correction est souvent insensible. La première Table est tirée de l'ouvrage anglais : *The practice of navigation...*, by Henry Ruper, et la deuxième a été prise avec correction dans : *Hulfstafeln zur zeit und bestimmungen*, von H.-C Schumacher (1820).

La Table XLIII, qui donne la réduction des heures, minutes et secondes en fractions décimales, est très-utile.

La dernière Table contient les établissements des ports et les unités de hauteur des marées pour les principaux ports. En passant, je ferai remarquer que l'*Annuaire* du Bureau des Longitudes et beaucoup d'autres ouvrages donnent à Dunkerque $11^h\ 45^m$ pour établissement, tandis qu'il est de $12^h\ 13^m$; de même pour Calais il est de $11^h\ 49^m$ et non $11^h\ 45^m$. Les quarante-sept Tables sont suivies d'explications détaillées qui permettent d'en faire rapidement usage.

Ce serait une erreur de croire que ces Tables ne sont utiles qu'aux navigateurs; les professeurs des lycées peuvent s'en servir également avec avantage. Ils y trouveront des exercices des deux trigonométries et de cosmographie avec emploi continuel de logarithmes et aussi de co-logarithmes. Ce mot est nouveau, mais la chose est ancienne; c'est ce qu'on appelait jusqu'ici complément des logarithmes, opération très-commode et encore plus quand on n'a pas besoin de la faire, car, dans cet ouvrage, elles sont pour la première fois toutes faites. Lorsque presque toutes les productions du jour ne se distinguent les unes des autres que parce que les unes mettent à droite ce que les autres mettent à gauche, on est heureux de rencontrer un travail où se manifeste une pensée spontanée qui a un mérite intrinsèque et qui porte le cachet d'un perfectionnement réel.

TERQUEM (PAUL),
Professeur d'hydrographie à Dunkerque

COURS D'ARITHMÉTIQUE, rédigé conformément aux *Programmes officiels;* par M. *Dupain,* ancien élève de l'École Normale. In-8. Prix : 3f 50c.

COURS DE GÉOMÉTRIE, rédigé conformément aux *Programmes officiels;* par M. *Dupain,* ancien élève de l'École Normale. In-8. Prix : 1f, 50.

Encore une Arithmétique! Il y en a déjà tant! Elle est, comme la plupart de ses devancières, conforme aux *Programmes officiels* et *utile* aux élèves qui veulent passer des examens.

L'auteur a d'abord fait une arithmétique pour ceux qui se proposent simplement d'*apprendre* l'arithmétique, puis il s'est étendu sur ce lit de Procuste qu'on appelle *programme,* et, à force de s'y débattre, il a pu s'en relever sinon sans meurtrissures, du moins sans mutilations.

Écrire sur un sujet si rebattu, c'est prendre l'engagement de dire autrement que tout le monde; cet engagement, M. Dupain l'a tenu. Tantôt c'est la forme qui se renouvelle: pour démontrer, par exemple, qu'un produit de deux facteurs ne change pas quand on change l'ordre des facteurs; tantôt c'est le fond même de la démonstration : pour trouver, par exemple, l'erreur relative d'un produit.

Le style est en général concis. M. Dupain aime la brièveté; il ne doit pas être bavard. Mais quand il s'agit d'éclairer une question, il en prend son parti et n'économise pas ses phrases. Ainsi la définition de la division est très-détaillée et tient plus de deux pages; il est vrai que l'élève qui aura lu attentivement ces deux pages aura une idée nette du but multiple de cette opération, autrefois l'épouvantail des écoliers.

Quelle analogie y a-t-il entre la multiplication et la division des entiers et celle des fractions? Comment les théorèmes sur les facteurs entiers s'étendent-ils aux facteurs fractionnaires? Quelle est la portée de cette généralisation? Voilà des questions que traite longuement l'auteur et dont la solution jettera plus tard du jour sur la théorie algébrique des quantités négatives.

Ceux qui aiment le *summum jus* trouveront téméraires quelques paragraphes qui ne peuvent être acceptés que par une interprétation libérale de la lettre du Programme. Nous citerons la théorie des chiffres romains, des nombres premiers, la preuve par 9, les mesures de temps, etc.

Pour se faire pardonner cette audace, M. Dupain a fait de larges concessions à l'esprit nouveau. Arrière les proportions! il n'en reste qu'un souvenir. Heureusement que le Programme, qui a pour l'*adjectif* le même faible que les romantiques dont parle Alfred de Musset, nous laisse les quatrièmes *proportionnelles* et les grandeurs *proportionnelles* sur lesquelles M. Dupain a pu consolider les règles de trois qui ont aussi reçu des novateurs un laissez-passer.

Parler des logarithmes à des lecteurs qui ne connaissent ni les progressions ni les exposants fractionnaires est un de ces tours de force imposés par le Programme et dont M. Dupain s'est tiré par une définition empruntée au *Cours d'analyse algébrique* de M. Cauchy.

La théorie de la règle à calcul est une de ces *utilités* introduites récemment. Le sujet est traité en quatre pages qui en disent plus que bien des brochures.

Mais le triomphe des *utilitaires* est dans les *exercices*, gâteau de farine et de miel que l'auteur jette dans la triple gueule de Cerbère pour franchir le seuil de nos écoles. Le budget, la bourse, les chemins de fer, l'armée, la marine, l'éclairage au gaz, la boucherie, la boulangerie, l'agriculture, l'almanach et jusqu'aux allumettes chimiques y ont trouvé place et étouffent quelques questions de science *pure* que l'incorrigible auteur y a glissées.

Nous signalerons encore dans l'Arithmétique de M. Dupain quelques notes historiques et une table de matières très-développée qui facilite beaucoup les recherches.

En géométrie, l'auteur avait moins de concurrents, mais aussi moins de guides; il a interprété largement le Programme, et, à l'aide de notes, d'appendices, d'introduction, d'exercices, il a trouvé moyen d'initier les élèves studieux (il y en a encore) à l'étude sérieuse des sections coniques.

Pour racheter cette hardiesse, il a fallu sacrifier à l'*utile;* aussi est-il question de vis ordinaires, de vis d'Archimède, d'escaliers, de bateaux à vapeur, de solénoïdes, d'orbites planétaires, d'aplatissement du méridien, de projectiles, de miroirs, de jardinage, de voûtes à construire, d'alignements de routes à raccorder, etc.

PAR UN PROFESSEUR.

Note du Rédateur. La *science* n'est plus qu'un instrument accessoire dans l'enseignement: les applications sont le point essentiel. C'est à qui entassera le plus de questions disparates sur la mécanique, l'agriculture, la physique, le commerce, la chimie, l'astronomie, la métallurgie, les voies de fer, etc; sorte d'exposition mathématique de bric-à-brac. Descartes ne l'entendait pas ainsi. Voici ce qu'il nous dit: « Mais je ne m'arrête point à » expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterais » le plaisir de l'apprendre de vous-même et l'utilité » de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à » mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette » science » (*Géométrie*, édit. de Cousin, t. V, p. 316).

C'est précisément à cette *principale* utilité qu'on fait la guerre. On n'en voit d'autre que celle dont les résultats peuvent se coter à la Bourse. Contradiction singulière ! ils préconisent une philosophie spiritualiste et un enseignement matérialiste. Cela rappelle les dernières paroles du juste :

ού γὰρ οἴδασι τί ποιοῦσι.

SUR LE PROBLÈME DES BŒUFS ATTRIBUÉ A ARCHIMÈDE

(voir page 113).

Monsieur le Rédacteur,

Puisque vous m'avez donné l'occasion de m'occuper du Problème des Bœufs attribué à Archimède, je vais vous faire part de quelques remarques que m'a suggérées votre article curieux.

Je crois comme Struve, non-seulement que les deux dernières conditions ont été ajoutées, mais qu'il en est de même de tout ce qui est relatif aux vaches, depuis le vers 17e jusqu'au 26e inclusivement, plus les vers 28 et 29 qui me paraissent interpolés, de manière à séparer en deux le dernier distique où je lirais πόσοι au vers 27.

Ainsi les vers 1 à 16 me semblent présenter un énoncé complet, auquel les vers 27 et 30 forment un épilogue très-convenable.

Le problème ainsi réduit a pour solution la plus simple ou principale les quatre nombres que vous donnez à la page 117, savoir :

2226 bœufs blancs

(je pense que le rédacteur primitif n'avait pas songé à distinguer les sexes, et qu'il prenait ταῦροι tout simplement dans le sens de βόες) ;

Ensuite :

1602 bœufs noirs,
1580 bigarrés,
891 roux.

On obtient toutes les autres solutions du problème en multipliant ces divers nombres par un entier quelconque.

L'auteur concluait en disant : « Mon cher ami, si tu » nous dis exactement d'après cela le nombre des bœufs » d'Hélios, tu n'as pas à craindre de passer pour inha- » bile ou ignorant en arithmétique. »

Cette conclusion est évidemment complète et n'indique aucune restriction de la part de l'interrogateur.

C'est donc bien un nouveau rédacteur qui ajoute : « Mais je ne te tiens pas quitte : il faut encore, si tu veux » passer pour vraiment savant, etc. »

Or, quelles sont les nouvelles conditions auxquelles sont assujettis les nombres demandés ? il y en a deux. Voici comment je comprends la première : je ne pense pas que la somme des nombres de bœufs blancs et noirs doive être un carré parfait ; je suppose que l'auteur a voulu dire simplement : si les bœufs blancs et noirs réunis étaient rangés en carré, en comptant tous ceux du circuit, la somme des premiers rangs sur tout le périmètre du carré, τὰ περιμήκεα, égalerait la mesure des plaines de la Sicile ; et je lis en conséquence πλῆθος au lieu de πλίνθου qui n'a pas de sens en cet endroit.

(Peut-être aussi faut-il lire ἔμβαδον au lieu de ἔμπεδον.)

En deux mots, *le quadruple de la racine carrée* du nombre des bœufs blancs et noirs serait *la mesure de la Sicile*.

Du reste, cette condition ne me paraît pas devoir être prise en rigueur, c'est-à-dire exiger une racine carrée exacte : quel que soit le nombre des hommes d'une troupe, on peut toujours proposer de les disposer en bataillon carré ou supposé tel. L'auteur dit simplement : « quand ils étaient placés de manière à avoir la même » mesure en largeur et en profondeur. »

Je reviendrai tout à l'heure sur la manière de satisfaire à cette condition ; je dois auparavant examiner la seconde. Celle-ci ne comporte pas la même tolérance que la première ; il y est dit expressivement que les bœufs roux joints aux bigarrés doivent former un nombre triangulaire, *sans qu'il en manque ni qu'il en reste aucun*. Or, tout nombre triangulaire devant être de la forme $\frac{1}{2}x(x+1)$, il faut donc faire en sorte que le nombre 2471, qui représente la somme des nombres cités, $(T+J)$, dans la plus simple des solutions de la question primitive, ou que le facteur 353, nombre premier qui est le septième de 2471, puisse être identifié à l'un des nombres x, $x+1$, ou à leurs moitiés. Les hypothèses qui se présentent le plus naturellement sont celles-ci :

$$x = 2471, \qquad \frac{1}{2}(x+1) = 1236,$$

$$x+1 = 2471, \qquad \frac{1}{2}x = 1235,$$

$$\frac{1}{2}x = 2471, \qquad x+1 = 4943,$$

$$\frac{1}{2}(x+1) = 2471, \qquad x = 4941,$$

$$\frac{1}{2}x = 353, \qquad x+1 = 707 = 7 \cdot 101.$$

Pour chaque cas, le nombre qui multiplie 2471 dans le produit $\frac{1}{2} x (x + 1)$ est le facteur par lequel il faut multiplier tous les nombres de la solution principale.

Ainsi, dans la cinquième hypothèse ci-dessus, le multiplicateur sera 101.

Maintenant, il faut, en revenant à la première condition supplémentaire, que le multiplicateur adopté puisse conduire à la mesure de la Sicile, ce qui déterminerait complétement le problème. Deux nombres se présentent en premier lieu de manière à satisfaire approximativement à cette condition. Ce sont les nombres 12354950 et 12355050. En effet, d'abord chacun d'eux fournit un nombre triangulaire quand on le multiplie par 2471, puisque le premier donne pour produit

$$\frac{247099 . 247100}{2},$$

et le second

$$\frac{247101 . 247100}{2}.$$

Ensuite, si on les multiplie respectivement par 3828, ils donnent pour produit

$$47294748600 \quad \text{et} \quad 47295131400,$$

dont les racines carrées sont (à une unité près)

$$217473 \quad \text{et} \quad 217474,$$

et les quadruples de ces racines

$$869892 \quad \text{et} \quad 869896.$$

Maintenant, si nous cherchons dans Strabon (liv. VII) les dimensions de la Sicile, nous voyons qu'il attribue à sa forme triangulaire un périmètre de 4400 stades qui se distribuent ainsi :

	1720	st. pour le grand côté,
	1550	st. pour le moyen côté,
	1130	st. pour le petit côté.
Total...	4400	

Or, si l'on calcule l'aire de ce triangle par la formule de Héron d'Alexandrie, on obtient d'abord, pour le carré de cette aire, le nombre 734448 000 000, lequel serait un carré parfait si le chiffre 8 s'y trouvait remplacé par 9, et la racine de ce carré serait 857 000, nombre représentant des stades carrés.

On conçoit d'ailleurs que cette évaluation est nécessairement au-dessous de la vraie valeur du territoire de l'île, à cause des sinuosités du contour, dont la formule fait abstraction.

On peut donc considérer les deux nombres ci-dessus trouvés, 869 892 et 869 896, comme représentant approximativement l'aire totale de la Sicile, conformément à l'énoncé. En conséquence, on a pour solution de la première et de la troisième partie de la question, les formules

$$
\begin{aligned}
B &= 2226k,\\
N &= 1602k,\\
T &= 1580k,\\
J &= 891k,
\end{aligned}
$$

dans lesquelles $k = 12\,355\,000 \pm 50$.

On peut d'ailleurs arriver à un résultat plus rapproché de 857 000 en multipliant 2471 par 99, ce qui donne 244 629, et posant

$$T + J = \frac{244629 \times 244628}{2}.$$

Alors, faisant

$$B + N = 3828 \times 99 \times \frac{244628}{2} = 46\,353\,581\,208,$$

on a pour la racine carrée 215 298 qui, multiplié par 4, donne 861 182, ce qui est bien près du résultat cherché.

Enfin, on aurait un résultat trop faible en multipliant 2471 par 98, ce qui donne 242 158, et posant

$$T + J = \frac{242\,158 \pm 242\,159}{2}.$$

Il faut alors faire

$$B + N = 3828 \times 49 \times 242\,159 = 45\,422\,247\,948;$$

la racine carrée est 213124 et le quadruple de cette racine donne 852496 (*).

Au surplus, l'incertitude qui reste ici quant au chiffre exact du résultat, ne doit pas étonner, et elle ne suffirait pas pour permettre de conclure que la voie proposée ne peut conduire à la bonne solution. Un nombre tel que l'évaluation de la surface totale de la Sicile n'a jamais pu être donné que comme approximation; et il est d'ailleurs vraisemblable que si l'auteur avait eu en vue un nombre exact, il n'eût pas ajouté la condition du nombre triangulaire qui rendait alors le problème plus que déterminé, à moins toutefois que ce ne fût comme simple vérification. Mais il arrive justement que les hypothèses qui

(*) Les géographes modernes donnent à la Sicile 1350 lieues carrées de superficie, ce qui, en supposant le degré de 25 lieues et de 700 stades, porte cette même surface à 1 058 400 stades carrés. En multipliant 2471 par 121, on a 298 991; en multipliant ensuite 3828 par 121 et par 298 992 : 2, on a pour resultat 1 052 576. Mais en multipliant 2471 par 122, on a 301 462; et multipliant alors 3828 par 61 et par 301 461, on obtient 1 061 268. Entre cette limite et les nombres proposes precedemment, je n'ai trouve aucun carre parfait remplissent cette dernière condition d'une manière satisfaisante ne paraissent nullement de nature à donner le carré parfait exigé par l'hypothèse que je combats.

Restent maintenant les vers 17 à 26, plus les vers 28 et 29 dont je n'ai pas encore parlé.

Ces douze vers me paraissent avoir été ajoutés tout à fait après coup; et même il me semble probable que le distique composé des deux vers 25 et 26 constitue une interpolation faite encore en surcharge et tout en dernier lieu. Faisons donc pour un instant abstraction de ce distique, et ne considérons que les huit vers compris de 17 à 24. Ici je crois que les traducteurs et commentateurs se sont complétement trompés en supposant aux mots σὺν ταύροις, au vers 22, cette signification que le nombre des taureaux devait être ajouté à celui des vaches. Je lis avec Lessing πάσης... ἐρχομένης; mais je place le point à la fin du vers précédent, en faisant dépendre σὺν ταύροις de ἐρχομένης, ce qui alors signifie simplement : *Les vaches rousses qui paissent avec les taureaux;* en un mot, je vois ici ce qu'en terme d'école on nomme une *cheville*. J'ajoute, en outre, que je lis ἔχοντ' ἀτρεκές à la fin du vers 24. Alors, les conditions du nouveau problème, tout à fait indépendant du premier quant à la solution, seront celles-ci : 1° le nombre des vaches blanches forme le *tiers* et le *quart* de celui des vaches noires; 2° le nombre des vaches noires est le *quart* et le *cinquième* de celui des vaches bigarrées; 3° le nombre de ces dernières est le *cinquième* plus le *sixième* de celui des vaches rousses.

Je suis d'autant plus porté à interpréter ainsi l'énoncé, que j'y crois voir une imitation des conditions du premier problème, où : 1° le nombre, des bœufs ou des taureaux *blancs* était la *moitié* et le *tiers* du nombre des noirs (en faisant abstraction des roux); le nombre des bœufs noirs était le *quart* plus le *cinquième* des bigarrés;

et 3° celui des bigarrés, le *sixième* plus le *septième* des blancs.

Avec ces trois conditions, auxquelles sont soumis les nombres des vaches de diverses couleurs, ces nombres sont indéterminés, bien que leurs rapports soient determinés. Mais si l'on ajoute une *quatrième* condition, savoir, comme dans les vers 25 et 26, que le nombre des vaches rousses doit être le sixième plus le septième de celui des vaches blanches, alors il est clair que le problème devient absurde. Il me semble voir là une addition maladroite faite par un scholiaste inintelligent, qui, n'entendant pas la question, aura jugé nécessaire de compléter ainsi l'énoncé où il croyait apercevoir un oubli.

Rejetant donc cette dernière condition comme entièrement apocryphe, on a pour les nombres les plus simples qui satisfont à la nouvelle question :

$$b = 231,$$
$$n = 396,$$
$$t = 880,$$
$$j = 2400;$$

et l'on obtiendra toutes les autres solutions en multipliant par un nombre entier quelconque.

Telles sont, Monsieur le Rédacteur, les remarques que m'a suggérées votre intéressant article. Elles ne lèvent sans doute pas toutes les difficultés; peut-être jugerez-vous néanmoins qu'elles peuvent encore présenter quelque intérêt à vos lecteurs.

J'aurais bien aussi quelques observations à vous adresser sur le texte grec que vous avez édité; mais je ne veux pas me faire de mauvaises affaires.

Au surplus, c'est là une de ces questions auxquelles on consacre volontiers quelques heures de loisir, mais on se reprocherait d'y sacrifier une trop notable fraction de cette précieuse étoffe de la vie humaine que l'on nomme le temps : car

Fugit interea, fugit irreparabile tempus.

Agréez, Monsieur le Rédacteur, etc.,

A.-J.-H. Vincent,
Membre de l'Institut.

LÉONARD BONACCI DE PISE (XIII[e] siècle).

Les coordonnées du centre de gravité de l'homme rapportées à trois plans fixes varient à chaque instant. Lors même que nous nous tenons en repos, la circulation, la respiration, tous les mouvements involontaires de la vie organique déplacent ce point sans cesse. La ligne décrite par ce centre de gravité, depuis la naissance jusqu'à la mort, est la trajectoire vitale géométrique de chaque individu. La vitesse, le $\frac{de}{dt}$ en chaque point de cette trajectoire est sans doute très-variable. Mais si l'on divise la longueur totale de la trajectoire par le temps, soit par le nombre de secondes qu'on a vécu depuis l'entrée dans le monde jusqu'à la sortie, on obtient une vitesse moyenne qui diffère beaucoup d'un individu à l'autre, d'un peuple à l'autre. Il en est ainsi de la trajectoire de la vie intellectuelle. Cette trajectoire se compose de *pensées* qui se comptent par le *nombre* et se mesurent par le *temps*. Ce nombre et surtout le temps établissent une grande différence entre les esprits; c'est surtout la durée de la pensée qui caractérise les esprits supérieurs. Buffon définit le génie: une aptitude à la patience, c'est-à-dire la faculté de faire durer la pensée, de la maintenir longtemps et avec intensité sur le même sujet. Souvent cette faculté de concentration intellectuelle rend impropre aux occupations vulgaires qui exigent des pensées fugaces et multiples. Il résulte de là que des hommes supérieurs passent souvent pour des *niais* chez les hommes inférieurs. C'est ainsi que les négociants de Pise, compatriotes de Léonard, lui ont donné le sobriquet de *Bighelone* (*) ; toutefois, c'était un des plus profonds penseurs du siècle de saint Louis et comme tel jusqu'à ce jour presque inconnu. Les érudits savaient que Léonard avait promulgué et propagé la numération et apporté en Occident l'algèbre des Arabes. Ce sont sans doute d'immenses services, mais qui n'ont que le mérite de l'importation première. Mais on ne se doutait guère qu'un géomètre du XIIIe siècle eût dépassé beaucoup Diophante et les Arabes et n'a été dépassé que par Fermat au XVIIe siècle. Découverte historique que nous devons aux persévérantes investigations du célèbre prince Boncompagni ; découverte infiniment supérieure à ces travaux sur des écrivains obscurs qu'on se plaît à tirer des ténèbres du moyen âge et qui, pour être publiés et illustrés, n'en restent pas moins obscurs. La mise au jour des trois écrits de Léonard enrichit de faits précieux les annales de l'esprit humain. Ce sont les seuls ouvrages qui soient complétement publiés. On en connaît sept :

1°. *Liber abaci* (1202 et corrigé en 1228) ; c'est un Traité d'Arithmétique et d'Algèbre. Le XVe chapitre concerne l'algèbre et a été publié par M. Libri (*Histoire des sciences mathématiques*, tome II, page 307, note III, 1838).

(*) *Bighelone* est peut-être le synonyme de Bonacci qui revient au *bonace* français. Il est connu sous le nom de Fibonacci par contraction de Filius Bonacci.

2°. *Practica geometriæ* (1220 à 1221); théorique et pratique.

3°. *Liber quadratorum* (1225); c'est l'œuvre principale (publié).

4°. *Flos super solutionibus quarundam questionum ad arithmeticam et ad geometriam vel ad utramque pertinentium* (publié).

5°. *De modo solvendi questiones avium et similium* (publié).

6°. Un commentaire sur le livre X des *Éléments* d'Euclide.

7°. *Libro di merchatanti detto di minor guisa;* n'existe plus, à ce qu'on sache, dans aucune bibliothèque; renfermait des règles d'alliage des métaux.

Les trois écrits 3°, 4°, 5° sont réunis dans un manuscrit du XV^e siècle, sur parchemin, appartenant à la bibliothèque ambrosienne de Milan (E. 75, *parte superiore*). La description de ce manuscrit et des détails bibliographiques sur tous les écrits de Léonard sont exposés dans l'ouvrage suivant avec une érudition et une exactitude auxquelles nous ne sommes plus guère accoutumés :

Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. Notizie raccolte da Baldassare Boncompagni, socio ordinario dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma, tipografia delle Belle Arti, 1854. In-8, VIII-400 pages.

C'est là que nous puiserons des renseignements sur la vie et les œuvres de l'illustre Pisan (*).

(*) M. Boncompagni, dans l'Avertissement, page III, fait savoir que tout ce qu'on trouve dans cet écrit doit être reproduit dans un ouvrage plus vaste qu'il se propose de faire sous le titre : *Della vita e delle opere di Leonardo Pisano* et dont une partie a déjà été publiée dans les *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, tomo V, anno V (1851-52), pages 5-91, 208-246.

Nous ne connaissons d'autres circonstances de la vie de Léonard que ce qu'il nous apprend lui-même au commencement de son *Traité de l'Abaque* et qu'on trouve dans l'ouvrage de M. Libri (*Histoire des sciences mathématiques,* t. II, p. 287, 1838). En voici la traduction :

« Ici commence le livre de l'*Abacus* composé par
» Léonard, fils de Bonacci de Pise, dans l'année 1202.

» Mon père était constitué à Bougie par les marchands
» de Pise comme greffier public (*publicus scriba*) (*) à la
» douane de Bougie. Comme il y avait continuellement
» affluence de commerçants chez lui, il me fit venir dès
» mon enfance, et voulut que je restasse pendant quelque
» temps pour m'appliquer à l'étude de l'abaque en vue d'un
» avantage, d'une utilité à venir. Un admirable maître
» m'ayant initié dans l'art des figures indiennes, je pris
» tant de plaisir à l'esprit de cet art, que je voulus savoir
» tout ce qu'on enseignait là-dessus en Egypte, en Sy-
» rie, dans la Grèce, en Sicile et dans la Provence
» (*Proventiam*), avec les diverses variétés. Ayant par-
» couru auparavant ces contrées, je m'y instruisis par
» beaucoup d'études et de discussions, mais je considérai
» tout ceci et même l'Algorisme de Pythagore (*Picta-*
» *goræ*) comme défectueux en comparaison de la méthode
» indienne. C'est pourquoi ayant serré de plus près
» cette méthode et étudié plus attentivement, y ajoutant
» quelque chose de mon propre fonds et y appliquant
» quelques artifices géométriques d'Euclide, j'ai travaillé
» à la composition de cet ouvrage, et pour être le plus
» intelligible qu'il m'est possible, je l'ai divisé en quinze
» chapitres distincts. J'ai tout donné avec des raisonne-
» ments démonstratifs, afin que ceux qui aspirent à

(*) *Scriba* Il y en a qui voient là un notaire : c'est probablement une espèce de consul commercial

» cette science seulement parce qu'elle est plus parfaite
» que les autres, puissent s'instruire et qu'à l'avenir la
» gente latine ne s'en trouve pas dépourvue comme jus-
» qu'à présent.

» Si par hasard je n'ai pas dit assez ou trop et plus
» qu'il n'est nécessaire, je prie qu'on ait de l'indulgence
» pour moi, car il n'y a personne qui n'ait quelques dé-
» fauts et qui soit circonspect en toutes choses et par-
» tout. »

Léonard avait au moins une vingtaine d'années en écrivant son abaque en 1202, ce qui porte l'année de sa naissance vers 1170 ou 1180; on ignore l'année de sa mort. Il y en a qui le font voyager vers Constantinople à la fin du XIII^{e} siècle, ce qui est impossible. Quoi qu'il en soit, il est certain que notre géomètre était à Pise en 1225, lors du passage de l'empereur Frédéric II.

Ce souverain, dédaignant les idées régnantes, ennemi des croisades, projeta l'indépendance de l'Italie, sa patrie. Il eut à combattre d'ambitieux compétiteurs, d'audacieux pontifes romains, et mourut à la peine. Malgré ces tribulations, il cultivait les lettres, la poésie, et composa un ouvrage sur la chasse estimé encore aujourd'hui. Aimant aussi les sciences, il encouragea les savants et avait dans sa suite deux géomètres de mérite, à en juger par le choix des questions qu'ils adressèrent à Léonard et dont les réponses ont donné naissance aux trois écrits mentionnés (3°, 4° et 5°).

L'un de ces géomètres est Jean de Palerme. Le lieu de sa naissance est la seule chose qu'on en connaisse. Il a proposé trois questions en présence de l'empereur, sorte de tournois scientifiques qui se sont maintenus jusqu'au XVII^{e} siècle.

Le second savant est un nommé Théodore. Il eut à soutenir une joute philosophique contre un docteur de l'ordre des frères Prêcheurs, premier nom des Dominicains, fondé à Toulouse en 1215. Voici comment le fait est raconté par le P. Thomas Malvenda, *lui-même Dominicain*, dans son *Histoire des frères Prêcheurs sous l'année* 1238. (*Annalium sacri ordinis Prædicatorum centuria prima*, A. R. P. F. Thoma Malvenda. Neapol., MDCXXVII.) C'est un trait curieux des mœurs du temps.

« Le frère Roland, Crémonais de nation, qui passait pour grand philosophe dans ce siècle, était le premier des frères Prêcheurs qui fut licencié et docteur de l'Université de Paris. Il composa avec beaucoup de finesse un résumé de philosophie, car il était très-érudit en matières théologiques et philosophiques. Étant une fois à Crémone, il apprit de quelques frères Prêcheurs qui revenaient de l'armée de Frédéric II, assiégeant alors Brescia (1238), que le philosophe de l'empereur les avait embarrassés de questions au sujet de la philosophie de Roland, sur lesquelles ils ne savaient pas répondre. Enflammé de zèle pour son ordre, il dit : « Préparez-moi un âne. » Car il était goutteux et ne pouvait aller à pied. Cela étant fait, assis sur l'âne, il entra, accompagné de quelques frères Prêcheurs, dans le camp et commença par demander où était le philosophe. Beaucoup d'hommes considérables qui connaissaient et honoraient le philosophe s'étant réunis, et le philosophe étant appelé, Roland lui dit : « Afin que tu saches, toi, maître Théodore, que l'ordre des frères Prêcheurs a des philosophes, je te donne le choix, en présence de ceux-ci, de faire des objections ou de préparer des réponses sur quelque partie de la philosophie que tu veuilles. » Comme Théodore choisit les *objections* de préférence aux *réponses*, Roland remporta dans cette lutte remarquable une victoire qui fut pour l'ordre un grand honneur et une grande gloire. » (*Intorno ad alcune opere, etc.*, p. 47.)

Ce résultat serait moins contestable, s'il était raconté par une personne étrangère à l'*ordre*, car les corporations, système d'esprits concentrés en un seul esprit, possèdent à un degré éminent l'art d'arranger les faits et ne se font pas faute d'exercer cet art.

En janvier 1855, nous donnerons l'analyse complète des trois écrits (*Tre scritti*, *etc.*,) et des considérations de MM. Boncompagni, Genocchi et Lebesgue sur cette mémorable production qui inaugura le grand siècle de saint Louis.

BIBLIOGRAPHIE.

Eléments de Géométrie, rédigés d'après les *nouveaux Programmes* de l'enseignement scientifique des Lycées; par M. *A. Amiot*, professeur de Mathématiques au Lycée Saint-Louis, à Paris. Paris, 1855; in-8 de 144 pages; figures dans le texte. (Cours de troisième scientifique.)

C'est un fait généralement admis, nullement contesté, que les études, tant littéraires que scientifiques, baissent dans les institutions et colléges universitaires; que les examens, gagnant sans cesse d'étendue, par suite même de cette étendue, diminuent sans cesse d'intensité. Les ouvrages qui prennent le titre de *conformes* sont, en effet, conformes à cet état maladif, à cette asthénie qui mine l'enseignement. Lorsqu'on prescrit aux auteurs la forme, le fond et même l'ordre logique des matières; lorsque, enfermés dans ce cercle de Popilius, ils ne peuvent en sortir, s'en écarter pas plus que le soldat de ses *théories*, la pensée frappée d'hémiplégie, n'enfante que des œuvres malingres, rabougries, sans espoir aucun de vitalité. Toutefois, il serait injuste de ranger dans la même catégorie tous les écrits *conformistes*. Le manteau que le Programme jette sur l'esprit et le talent ne les empêche pas de percer lorsqu'ils existent. C'est ce qu'on aperçoit en lisant ce cours de troisième. Le savant professeur a publié naguère un Traité, excellente introduction à la géométrie segmentaire, dite supérieure. On ne dépouille jamais le vieil homme, et on retrouve dans cet opuscule plusieurs qualités qui distinguent le *Traité*. Les trente-trois leçons roulent sur les figures planes. Chaque leçon, précédée d'un énoncé du Programme, développe cet énoncé.

Nous soumettons à l'estimable auteur quelques observations.

On appelle corps *une portion limitée de l'étendue* (p. 1).

Le corps est un volume impénétrable, et, comme tel, appartient à la mécanique et non à la géométrie, qui ne considère que des volumes, que des figures pénétrables. Dans cette définition, il s'agit de l'*espace* général et non de l'*étendue* qui exprime la manière d'être d'un corps particulier. Il me semble que la vraie définition géométrique est celle-ci : *On appelle* volume *une portion limitée de l'espace* (*).

La surface *d'un corps, c'est-à-dire ce qui le limite en tout sens, n'a que deux dimensions : la longueur et la largeur* (p. 1).

La surface est la partie commune au volume et à l'espace; c'est ce qui sépare le volume de l'espace général, c'est ce qui fait qu'il a une dimension de moins. De même la ligne est la partie commune à deux surfaces, et le point

(*) *Tangere enim et tangi, nisi corpus, nulla potest res.*
(Lucret. lib. I, v. 305.)

la partie commune à deux lignes ; cette *communauté* entraîne toujours la perte d'une dimension.

Nous croyons d'ailleurs avec M. Vincent qu'à l'entrée la notion des dimensions est déplacée. D'abord on ne peut en donner une explication nette ; ensuite, cette notion est inutile, on peut s'en passer pour le moment.

La ligne droite est la ligne qui tend constamment vers un seul et même point, c'est-à-dire qu'elle va d'un de ses points vers un autre par le chemin le plus court (p. 2).

L'idée d'un chemin, et surtout d'un chemin minimum suppose déjà l'idée d'une droite et ne peut servir à la définir ; renoncer à toute définition est encore ce qu'il y a de mieux. Il est à remarquer qu'en latin et en français la droite n'a pas de nom spécial et n'exprime que l'idée de direction. *Linea recta, directa*, ligne droite. Chez les Grecs, elle a un nom spécial, εὐθεῖα, *ligne bien posée*.

Leur somme égale un angle droit (p. 6) ; ne faut-il pas : *leur somme est égale à un angle droit ? Égaler*, c'est rendre égal et non pas être égal. De même pour d'autres locutions de ce genre.

Je trace par le point E *la perpendiculaire* EF *à la droite* AB.

Sur le terrain on *trace*, mais en style géométrique on *élève* des perpendiculaires. Les lignes sont des conceptions mentales sans traces matérielles.

Un triangle est la portion de plan terminée par trois lignes droites qu'on appelle ses côtés.

On évite toute ambiguïté en disant : *Le triangle est une figure plane déterminée par trois lignes droites qu'on appelle les côtés du triangle.*

Nous signalons une démonstration très-simple de cette proposition fondamentale que *si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun et les angles compris inégaux, les troisièmes côtés sont inégaux* (p. 11). L'auteur suppose la bissection d'un angle, supposition très-admissible. Euclide ne pouvait recourir à ce moyen, car il veut d'abord démontrer la possibilité de cette bissection.

On donne comme exercice cette belle propriété : *La somme des trois médianes est moindre que le périmètre du triangle.*

La V[e] leçon a pour objet le triangle isocèle.

On prend pour base *d'un triangle un côté de ce triangle, etc., la hauteur du triangle est la perpendiculaire tracée de son sommet sur sa base* (p. 14).

Il me paraît plus convenable de renverser cet énoncé et de dire : La perpendiculaire *abaissée* d'un sommet sur le côté opposé se nomme *hauteur*, et ce côté prend alors, relativement à cette hauteur, le nom de *base*.

A la page 15 on lit ces deux corollaires : *Un triangle équilatéral est équiangle et un triangle équiangle est équilatéral.* Jusqu'ici rien ne démontre la possibilité de tels triangles.

Tracer une perpendiculaire à une droite (p. 17). On ne trace pas *à* une chose.

Dans le théorème I de la VI[e] leçon (p. 17), il est question d'une *oblique* sans qu'on ait dit ce qu'on entend par une *oblique*.

Dans un triangle OCD rectangle en C, il est facile de démontrer que OD est plus grand que OC ; donc l'angle en D est moindre que l'angle C, et, par conséquent, D est aigu.

Remarque (p. 20). On appelle *lieu géométrique*; il faut ajouter *d'un point*. Alors le lieu géométrique d'un *point* est une ligne dont tous les points jouissent de la même propriété que ce *point*.

A la page 21, on indique un problème de minimum et de maximum fort utile.

VII[e] et VIII[e] Leçons. *Leçon* doit être au singulier ; ainsi le veut la grammaire. On dira que ce pluriel est généralement admis ; je réponds qu'on a généralement tort. Les lois de la grammaire doivent être respectées surtout par les géomètres. C'est l'observation rigoureuse de ces lois qui, sous la plume de Descartes et de Pascal, a donné à notre langue cette clarté qui établit sa supériorité sur toutes les autres langues (*); supériorité qui tend malheureusement à s'affaiblir.

A la page 22, on définit les parallèles et puis on démontre que deux droites perpendiculaires à une droite sont parallèles; il semble qu'il faut suivre la marche inverse: démontrer qu'il existe deux droites qui ne peuvent se rencontrer; et dire ensuite que de telles droites sont dites parallèles. Principe général: Il ne faut jamais définir un objet avant d'en avoir montré l'existence.

L'auteur a le bon esprit de fonder la théorie des parallèles sur ce postulatum de Gergonne: *Par un même point ne passe qu'une seule parallèle à une droite.*

Dans la IX^e^ leçon, qui traite des polygones, on fait cette bonne remarque, qu'un polygone convexe n'a pas plus de trois angles intérieurs aigus.

Il y a un bon choix de problèmes à la fin de la X^e^ leçon.

XI^e^ Leçon (p. 37). *La circonférence est une ligne courbe dont tous les points sont également éloignés d'un même point qu'on appelle* centre.

Puisqu'on a déjà défini ci-dessus le *lieu géométrique*, on pourrait dire: La circonférence est le lieu géométrique d'un point également éloigné d'un même point fixe nommé *centre*.

On démontre ensuite que cette ligne n'a nulle part

(*) L'étude trop générale des littératures étrangères est nuisible à la littérature nationale. Les Grecs, les Romains nous ont légué des chefs-d'œuvre; chez chacun de ces peuples on ne cultivait que la langue nationale. Les écrivains français du XVII^e^ nous ont transmis des chefs-d'œuvre, parce qu'ils ne lisaient et ne s'inspiraient que des chefs-d'œuvre grecs et latins.

trois points en ligne droite, donc elle est courbe; mais l'épithète *courbe* ne doit pas se trouver dans la définition.

XII^e Leçon (p. 43). PROBLÈME. *Étant donnés sur une carte quatre points dont trois ne sont pas en ligne droite, tracer sur cette carte une route circulaire qui passe à égale distance de chacun de ces points.*

C'est la question de concours de troisième en 1853 (*Nouvelles Annales*, t. XII, p. 318).

La XIII^e leçon est terminée par cette belle propriété : Soient ABCD un quadrilatère rectangle en C et en D; E le milieu de BD et $AD = AE = \frac{1}{2} AB$; menant la droite CE, on a

$$\text{angle AEC} = 3 \text{ angles ECB}.$$

Chez les géomètres grecs, on rencontre une trisection mécanique de l'angle fondée sur cette propriété.

Dans la XV^e leçon, on commence à s'occuper des mesures. Voici le *biais* que prend l'auteur pour établir la proportionnalité des incommensurables. Soient A et B deux grandeurs n'ayant aucune commune mesure possible; divisons B en n parties égales et cherchons combien de fois $\frac{B}{n}$ est contenu dans A. Soit ce quotient m; il y aura toujours un résidu, puisque A et B sont incommensurables; faisons $\frac{mB}{n} = A'$; le résidu est moindre que le diviseur $\frac{B}{n}$; plus n sera grand et plus le résidu sera petit, moins A' différera de A. Prenant donc n infiniment grand, on pourra substituer A' à A, et le rapport de B à A' est $\frac{m}{n}$; on substitue ainsi deux lignes commensurables à deux autres incommensurables. Cette substitution est légitime tant qu'il ne s'agit que des besoins pratiques de l'arithmétique ; il n'en est plus ainsi lorsqu'il s'agit des besoins de la logique. Il ne faut pas confondre les valeurs *approchées* quasi vraies avec des vérités approchées, avec des vérités quasi vraies ; de telles vérités sont sympathiques à l'esprit des programmes, mais antipathiques à l'esprit de la géométrie.

Parmi les beaux problèmes qui terminent cette leçon, on trouve celui-ci :

Si d'un point de la circonférence circonscrite à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.

C'est Servois, dans ses *solutions peu connues,* qui a rappelé l'attention sur cette importante propriété.

Le reste de l'ouvrage roule sur les polygones semblables, sur les polygones réguliers, les aires des figures planes, du cercle, etc. ; les levers de plans, les opérations sur le terrain, etc.

C'est le centre de similitude (Euler) qui devrait être, qui est le vrai point de départ de toute théorie sur la similitude directe et inverse (symétrie). Ce moyen d'exposition réunit facilité et rigueur.

Page 112, on dit que Lambert est un géomètre français ; en effet, il est né à Mulhouse, ville aujourd'hui française, mais en 1728 Mulhouse appartenait à la Suisse.

L'inventeur du rapport $\frac{345}{113}$ se nomme Adrien Metius ; c'est par erreur que Montucla lui donne le prénom de Pierre ; le fils avait le même prénom Adrien.

L'étendue de cette analyse montre l'intérêt que nous attachons à cette estimable production ; nous nous occuperons prochainement du complément de cet ouvrage, destiné aux cours de seconde et de rhétorique scientifiques.

NOTE SUR LA PROPORTION HARMONIQUE; NICOMAQUE et JAMBLIQUE.

(Extrait de NESSELMANN.) (*)

On lit dans Jamblique que cette proportion a été en usage chez les Babyloniens et que Pythagore l'a importée dans la Grèce. Son premier nom était ὑπεναντία, l'*opposé*. Voici la raison de cette dénomination. Soient a, b, c trois grandeurs décroissantes; si elles forment une proportion continue *arithmétique*, on a $\frac{a}{b} < \frac{b}{c}$; si la proportion est *harmonique*, on a l'*opposé*, savoir $\frac{a}{b} > \frac{b}{c}$; dans la proportion géométrique, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

Ce sont Archytas (— v[e] siècle) et Hippasus qui ont donné à cette proportion le nom de *harmonique*, à cause de son emploi dans la musique; Jamblique l'appelle même *proportion musicale*.

Euclide (— IV[e] siècle) donne seulement la théorie de la proportion et de la progression géométriques (**). Le premier chez lequel on trouve la théorie de la proportion, des progressions arithmétiques et de la proportion har-

(*) Nesselmann voulait écrire une Histoire generale de l'Algèbre, il n'a publie que la première partie : *L'Algèbre chez les Grecs;* travail consciencieux, fait en consultant les sources, et qui doit faire amèrement regretter que, peu encourage, l'auteur ait abandonné l'entreprise et même, à ce qu'on dit, la carrière scientifique.

(**) Il démontre qu'on a

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + .$$

(Liv. IX, prop. 35)

monique est Nicomaque, qui vivait, à ce qu'il paraît, sous Tibère. Il était de Gerase, ville près de Bostra, en Arabie. On lui doit la théorie complète des nombres polygonaux et cette belle observation sur la suite naturelle des nombres impairs : que la somme donne la série des nombres carrés ; que le premier est le cube de 1 ; que la somme du deuxième et troisième est le cube de 2 ; que la somme du quatrième, cinquième et sixième est le cube de 3 ; du septième, huitième, neuvième et dixième le cube de 4 ; et ainsi de suite. Il énonce ces propriétés sans les démontrer ; son but n'était pas de composer une arithmétique, mais seulement une introduction (Ἀριθμητικῆς εἰσαγωγή) ; mais il n'emploie pas, comme Euclide, des *lignes* pour montrer les propriétés numériques ; il fait partout usage des nombres, ce qui est un progrès. Son ouvrage a été publié par Wechel en 1538 : Νικομάχου Γερασινοῦ ἀριθμητικῆς βιβλία δύο. *Nicomachi Gerasini Arithmeticæ libri duo, nunc primum typis excusi, in lucem eduntur. Parisiis,* 1538 ; in-4°. Il y a une édition de 1554.

On a encore :

Theologumena arithmeticæ, etc., accedit Nicomachi Gerasini instituto arithmetica ad fidem codicum monacensium emendata. Edidit F. Astius. Lips. 1817.

Les deux ouvrages sans traductions.

Jamblique, célèbre pythagoricien du IV^e siècle, disciple d'Anatole et ensuite de Porphyre, a composé plusieurs écrits dans l'esprit de cette philosophie arithmético-mystique.

L'ouvrage cité ci-dessus est : *Jamblicus Chalcidensis ex Cœle-Syria in Nicomachi Gerasini Arithmeticam introductionem et de Fato. Nunc primum editus, in latinum sermonem conversus, notis perpetuis illustratus à* Samuele Tennulio. *Accedit Joachimi Camerarii Explicatio in duos libros Nicomachi, cum indice rerum et ver-*

borum locupletissimo. Arnhemiæ. Prostant apud Jah. Friderian Hagium. Daventræ typis descripsit Wilhelmus Wier. CIↃIↃCLXVIII (1668); in-4 de 181 pages.

L'Explication de *Camerarius* jointe à cet ouvrage porte la date 1667 et contient 238 pages; mais la première édition de cette Explication est de 1554; in-8, Augus. Vindel. Ces explications se trouvent aussi sous le titre : *Explicatiunculæ Arithmetices doctrinæ Nicomachi*, dans l'ouvrage suivant de J. Camerarius :

De græcis et latinis numerorum notis et præterea Saracenis seu Indicis. Lipsiæ, 1556; 1569.

La traduction et les notes de Tennulius sont mauvaises sous le rapport philologique et scientifique. On peut indiquer aux philosophes de l'École Normale, comme beau et bon travail à entreprendre, une nouvelle édition avec traduction française. C'est un moyen de ramener nos philosophes contemporains vers les études mathématiques. Prétendre professer la philosophie et vouloir rester étranger aux sciences exactes, n'est qu'une plaisanterie, qui aurait fait bien rire, chez les anciens, Platon, Aristote, Nicomaque, Jamblique, Proclus, et, chez les modernes, Descartes, Mallebranche, Gassendi, Spinosa, Leibnitz, Clarke, Locke et Kant. Quand aurons-nous une traduction de Nicomaque? Il ne faut pas confondre son Arithmétique avec l'œuvre mystique suivant qu'on lui a faussement attribué : τα θεολογούμενα τῆς ἀριθμετικῆς. *Habes hic, studiose lector, novum opusculum antehac nusquam excusum, in quo ita numerorum ratio explicatur ut non sit obscurum intelligere, hanc arithmeticam ad interiorem illam de philosophia disputationem, quam theologiam veteres vocabant, conferre plurimum.* Parisiis, 1543

Nicomaque et même son commentateur Anatolius sont cités dans cet ouvrage.

L'ouvrage suivant, tiré à 250 exemplaires, est excessivement rare : Th. Taylor. *Theoric arithmetic in three books, containing the substance of all that has been written on this subject by Theo of Smyrna, Nicomachus, Jamblichus, and Bœtius.* London, 1816; in-8.

On rencontre encore dans Jamblique la solution de deux questions importantes pour l'histoire de la science.

Il résout la première de ces questions au moyen d'une certaine règle qu'il attribue à un nommé Thymaridas, dont il cite aussi ces deux définitions. L'*unité* est la *grandeur déterminée*; c'est en effet par l'unité que toute grandeur se détermine (περαίνουσα ποσότης) (p. 11), et les nombres premiers sont des lignes droites (εὐθυγραμμικοί), parce que ces nombres sont les seuls qui ne peuvent se présenter sous la forme d'un rectangle (p. 36). La règle est nommée *épanthème* ἐπάνθημα, *fleurs*, *ornement ajouté* (p. 88). Le texte est très-corrompu en cet endroit; voici l'explication de M. Nesselmann en style moderne (p. 232).

Soient les n équations suivantes entre les n inconnues $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$:

$$\begin{aligned}
x + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} &= a, \\
x + y_1 &= b_1, \\
x + y_2 &= b_2, \\
x + y_3 &= b_3, \\
&\ldots\ldots \\
x + y_{n-1} &= b_{n-1}.
\end{aligned}$$

a, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ sont des quantités connues; on obtient

$$x = \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} - a}{n-2}.$$

Jamblique applique cette règle à la question suivante d'analyse indéterminée :

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 2(x_3 + x_4), \\
x_1 + x_3 &= 3(x_2 + x_4), \\
x_1 + x_4 &= 4(x_2 + x_3),
\end{aligned}$$

à résoudre en nombres entiers.

On déduit de la dernière équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5(x_2 + x_3).$$

Posons

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2.3.4.5 = 120.$$

La première équation donne

$$3(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 240$$

et

$$x_1 + x_2 = 80,$$
$$4(x_1 + x_3) = 3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = 360,$$
$$x_1 + x_3 = 90,$$

et de même

$$x_1 + x_4 = 96.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 120, \\ x_1 + x_2 &= 80, \\ x_1 + x_3 &= 90, \\ x_1 + x_4 &= 96; \end{aligned}$$

appliquant l'*épanthème*, on obtient

$$x_1 = \frac{80 + 90 + 96 - 120}{2} = 73,$$

de là

$$x_2 = 7, \quad x_3 = 17, \quad x_4 = 23.$$

Ce sont, dit Jamblique, les nombres les plus simples; en les multipliant ou les divisant par un nombre quelconque, les résultats obtenus satisfont aussi au problème.

On voit donc que les Grecs s'occupaient d'*analyse indéterminée* avant Diophante. Celui-ci ne traite principalement que les équations du second degré, mais il est probable qu'il a donné aussi les équations du premier degré et que cette partie a disparu du manuscrit qui nous est parvenu. Il est assez singulier que ce soit la partie la plus facile qui se soit perdue. Dans ce même problème, Jamblique parlant algébriquement se sert du mot ἀόριστος (non déterminé) pour désigner l'inconnue, et du mot ὡρισμένος pour désigner les nombres donnés déterminés, mais sans aucun signe soit littéral, soit opératoire.

Le second point d'intérêt historique est l'énoncé de la propriété suivante : Si l'on ajoute les trois nombres 1, 2, 3, on obtient la somme 6. On obtient la même somme par l'addition de chaque agrégation suivante de trois nombres, sans en sauter un, sans le prendre deux fois, si l'on prend toujours, au lieu des dizaines, les unités correspondantes, ou si l'on considère les dizaines comme des unités d'un ordre supérieur, comme a fait Pythagore, ainsi qu'il a été dit ci-dessus (p. 145-146).

En style moderne, cela veut dire que si l'on a additionné trois nombres consécutifs dont le plus grand soit divisible par 3 et que l'on fasse la somme des chiffres, puis la somme des chiffres de cette dernière somme et ainsi de suite, on parvient finalement au nombre 6.

Exemple :

$$997 + 998 + 999 = 2994,$$
$$2 + 9 + 9 + 4 = 24,$$
$$2 + 4 = 6.$$

On voit, d'après l'énoncé de Jamblique, qu'il avait une idée très-exacte de la composition décimale des nombres, mais aucune notion d'une numération de position, d'une numération topique. D'ailleurs il est certain que si les pythagoriciens avaient connu une telle numération, ils n'auraient pas manqué, d'après la tendance de l'école, à rattacher quelque propriété mystique à la *position* des chiffres. Le théorème de Jamblique n'est qu'un cas particulier. Appliquant la même opération aux nombres de la forme $\dot{9} + p$ où $p < 9$, on parvient enfin au nombre p ; car ces sommes conservent toujours la même forme $\dot{9} + p$, et, allant en diminuant, il faut bien qu'on par-vienne à p. Une propriété analogue existe pour le nombre 11 ; en général, pour tous les nombres qui diffèrent de la base d'une unité, par excès ou par défaut, dans un système quelconque.

1856.

Nous avons la satisfaction d'annoncer pour paraître en 1856 les traductions suivantes :

1°. *Propriétés des lignes du troisième ordre* de Maclaurin, par M. E. de Jonquières, lieutenant de vaisseau.

2°. *Theoria de motu planetarum, etc.*, de Gauss ; par M. Dieu, professeur à la Faculté de Grenoble.

3°. Divers Mémoires de Gauss ; par M. Bertrand, professeur au lycée Napoléon.

Le *Mémoire sur les Moindres carrés* a déjà paru (*).

4°. *Astronomie sphérique* de M. Brunow ; par mon fils, Terquem (Paul), professeur d'hydrographie à Dunkerque.

5°. Mémoires de MM Encke, Hansen, Brunow *sur le calcul des perturbations planétaires* ; par MM. Lafon, attaché à l'Observatoire de Paris, et le Rédacteur des *Nouvelles Annales*.

6°. Mémoire couronné de M. Stern *sur les équations transcendantes* ; par M. Levi (Édouard), agrégé, ex-professeur au lycée de Saint-Étienne.

Pour paraître prochainement :

Les *Recherches astronomiques* par le célèbre directeur de l'Observatoire, M. Le Verrier ;

Les *Éléments de Calcul infinitésimal*, par M. Duhamel.

L'année s'annonce sous de bons auspices.

(*) Chez Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55. — Prix : 4 francs.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

Biographie.

Bibliographie.

Historique.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(*) Mort septuagénaire en décembre 1855, amateur zélé des mathématiques qu'il a cultivées jusqu'à sa dernière heure.

(*) Voir une correction page 130

ERRATA.

Page 137, ligne 10 en rem., *au lieu de* Gilbert, *lisez* Girard
138, ligne 7. *au lieu de* a^2, *lisez* a^3.
140, ligne 9, *au lieu de* 228, *lisez* 288.
140, ligne 8, *au lieu de* 228, *lisez* 288.
141, ligne 5 en rem., *au lieu de* $\sqrt{392}$, *lisez* $-\sqrt{392}$
144, ligne 10, *au lieu de* c^2, *lisez* $3c$
165, ligne 2, *au lieu de* 120, *lisez* 121

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER, RUE DU JARDINET, 12.