Nouvelles annales de mathématiques

Faure

Solution de la question 272 (Steiner)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 97-105
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__97_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 272 (STEINER)
(voir tome XII, p. 100),

PAR M. FAURE,
Officier d'artillerie.

Lemme. Soit

$$ax^4 - bx^3 + cx^2 - dx + e = 0$$

une équation du quatrième degré ; si l'on pose

$$y = \frac{1}{x^2},$$

l'équation précédente deviendra

$$\left.\begin{array}{r} e^2y^4 + 2ce \\ -d^2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} y^3 + 2ae \\ -2bd \\ +c^2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} y^2 + 2ac \\ -b^2 \end{array}\right| y + a^2 = 0.$$

Les racines de l'équation proposée étant designées par m_1, m_2, m_3, m_4, celles de la transformée seront

$$\frac{1}{m_1^2}, \frac{1}{m_2^2}, \frac{1}{m_3^2}, \frac{1}{m_4^2},$$

et l'on trouve facilement

$$\left(1 + \frac{1}{m_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_4^2}\right)$$
$$= \frac{(b-d)^2 + (a-c+e)^2}{e^2}:$$

de sorte que si e est constant ainsi que les différences $b - d$, $a - c$, le produit qui est dans le premier membre de l'équation sera aussi constant.

I. Considérons une parabole $y^2 = 2px$, à laquelle on mène quatre tangentes formant le quadrilatère ABCD et dont les côtés auront respectivement pour équation

(AB) $$y = m_1 x + \frac{p}{2m_1},$$

(AD) $$y = m_2 x + \frac{p}{2m_2},$$

(CB) $$y = m_3 x + \frac{p}{2m_3},$$

(CD) $$y = m_4 x + \frac{p}{4m_4};$$

les quantités m_1, m_2, m_3, m_4 indiquant les tangentes des angles que forment les côtés du quadrilatère avec l'axe de la parabole, ou si l'on veut avec la droite qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère donné, car il est visible que ces droites sont parallèles (théorème de Newton). Pour abréger le discours, nous appellerons médiane la ligne dont nous parlons.

Le côté AB touche la parabole au point M_1 qui a pour coordonnées

$$x = \frac{p}{2m_1^2}, \quad y = \frac{p}{m_1}.$$

Le côté AD touche la parabole au point M_2,

$$x = \frac{p}{2m_2^2}, \quad y = \frac{p}{m_2}.$$

De sorte que le produit des distances du foyer F de la parabole aux deux points de contact sera

$$FM_1 . FM_2 = \frac{p^2}{4}\left(1 + \frac{1}{m_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2^2}\right).$$

Or le point A, intersection des deux côtés AB, AD, a pour coordonnées

$$x = \frac{p}{2m_1 m_2}, \quad y = \frac{p(m_1 + m_2)}{2m_1 m_2},$$

d'où l'on déduit

$$FA^2 = FM_1 . FM_2.$$

Désignant par M_3, M_4 les points de contact des tangentes issues du point C opposé à A dans le quadrilatère, on trouve

$$FC^2 = FM_3 . FM_4 = \frac{p^2}{4}\left(1 + \frac{1}{m_3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_4^2}\right).$$

De sorte que l'on obtient pour le produit des distances du foyer de la parabole à deux sommets opposés quelconques du quadrilatère qui lui est circonscrit, la relation

$$FA.FC = \frac{p^2}{4}\sqrt{\left(1+\frac{1}{m_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_2^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_3^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_4^2}\right)}.$$

De là ce premier théorème : *Un quadrilatère étant circonscrit à une parabole, le produit des distances de son foyer à deux sommets opposés est égal à la racine carrée du produit des distances de ce même foyer aux quatre points de contact.*

On peut encore en déduire celui-ci : *Si l'on considère deux points fixes* A *et* C, *ainsi que des paraboles de même foyer* F, *et que l'on mène par les points donnés quatre tangentes à la parabole, le produit des distances de son foyer aux points de contact sera constant, etc.*

Les démonstrations géométriques de ces théorèmes sont faciles.

II. Appelons a et α les foyers d'une conique inscrite dans le quadrilatère ABCD; x, y, x' et y' les coordonnées respectives de ces foyers. Menons par ces deux points des tangentes à la parabole inscrite F, et soient μ_1, μ_2 les coefficients angulaires des tangentes issues du point a; μ_3, μ_4 ceux des tangentes issues du point α. On aura

$$x = \frac{p}{2\mu_1\mu_2}, \quad y = \frac{p(\mu_1+\mu_2)}{2\mu_1\mu_2},$$

$$x' = \frac{p}{2\mu_3\mu_4}, \quad y' = \frac{p(\mu_3+\mu_4)}{2\mu_3\mu_4}.$$

On indiquera que la conique (a, α) est tangente à la droite AB, en écrivant que le produit des perpendiculaires abaissées de ses foyers sur cette droite est égale à une certaine quantité b^2. Cela donne la relation

$$\frac{p^2}{4}\left(\frac{\mu_1+\mu_2}{\mu_1\mu_2} - \frac{m_1}{\mu_1\mu_2} - \frac{1}{m_1}\right)\left(\frac{\mu_3+\mu_4}{\mu_3\mu_4} - \frac{m_1}{\mu_3\mu_4} - \frac{1}{m_1}\right) = b^2(1+m_1^2).$$

Or soient :

S_1 la somme des quantités μ_1, μ_2, μ_3, μ_4;

S_2 la somme de leurs produits deux à deux;

S_3 la somme de leurs produits trois à trois;

S_4 leur produit.

La relation précédente développée devient, en posant $\frac{4b^2}{p^2} = K$,

$$(1)\quad (1 - KS_4)m_1^4 - S_1 m_1^3 + (S_2 - KS_4)m_1^2 - S_2 m_1 + S_4 = 0.$$

On aura trois autres équations pour exprimer que la conique est tangente aux autres côtés du quadrilatère et l'on obtiendra ces équations en remplaçant dans la précédente m_1 successivement par m_2, m_3, m_4. D'où il suit que si l'on considère m_1, m_2, m_3, m_4 comme des inconnues, elles seront déterminées par l'équation (1). Cette équation est de la forme indiquée dans le lemme; on aura en conséquence

$$\left(1 + \frac{1}{m_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m_4^2}\right) = \frac{(S_1 - S_2)^2 + (1 - S_2 + S_4)^2}{S_4^2}.$$

Appelons maintenant :

M_1 la somme des quantités μ_1^2, μ_2^2, μ_3^2, μ_4^2;

M_2 la somme de leurs produits deux à deux;

M_3 la somme de leurs produits trois à trois;

M_4 leur produit.

Développons le second membre de l'équation précédente et remarquons que

$$S_1^2 - 2S_2 = M_1,$$
$$S_2^2 - 2S_1S_3 + 2S_4 = M_2,$$
$$S_3^2 - 2S_2S_4 = M_3,$$
$$S_4^2 = M_4,$$

on aura

$$\left(1+\frac{1}{m_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_2^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_3^2}\right)\left(1+\frac{1}{m_4^2}\right)=\frac{1+M_1+M_2+M_3+M_4}{M_4}$$
$$=\left(1+\frac{1}{\mu_1^2}\right)\left(1+\frac{1}{\mu_2^2}\right)\left(1+\frac{1}{\mu_3^2}\right)\left(1+\frac{1}{\mu_4^2}\right).$$

Cette égalité indique que si une conique est inscrite dans un quadrilatère et que par ses foyers on mène les quatre tangentes à la parabole (inscrite au même quadrilatère), ces quatre tangentes feront avec la médiane des angles dont le produit des sinus est constant.

On verra encore, après avoir fait la construction précédente, que les quatre tangentes issues des deux foyers d'une conique quelconque inscrite à un quadrilatère rencontrent la tangente au sommet de la parabole en quatre points dont le produit des distances au foyer de la parabole est constant.

Cette même égalité prouve aussi que si une conique est inscrite dans un quadrilatère, le produit des distances de ses foyers à celui de la parabole est constant.

Si l'on fait varier la parabole et le quadrilatère, on obtient des théorèmes intéressants. Ainsi :

Considérant une conique et un système de paraboles de même foyer F *et menant les quatre tangentes communes à la conique et à l'une des paraboles : 1° le produit des distances du foyer* F *à deux sommets opposés du quadrilatère déterminé par les tangentes est constant; 2° le produit des distances du foyer* F *aux points de contact sur la parabole est constant.*

Le théorème subsiste encore si, au lieu de la conique donnée, on en considère une seconde de même foyer.

III. Puisque les quantités μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 entrent symétriquement dans l'équation (1), on voit que si par les deux foyers a, α d'une conique inscrite dans un quadrilatère on mène des tangentes à la parabole qui lui est inscrite, ces tangentes se coupent en deux autres couples de points qui peuvent être considérés comme les foyers de deux autres coniques inscrites. Sur chaque tangente à la parabole il y a donc trois points et seulement trois qui peuvent être regardés comme appartenant au lieu des foyers des coniques tangentes à un quadrilatère : ce lieu est par conséquent du troisième degré. La courbe dont il s'agit a été étudiée à plusieurs reprises dans les *Nouvelles Annales;* elle passe par les sommets du quadrilatère complet ABCD, et M. Terquem a indiqué une méthode pour lui mener une tangente aux points où elle coupe le quadrilatère (t. IV, p. 373). Ainsi pour mener la tangente au point A, intersection des côtés AB, AD, on mène la diagonale AC et l'on trace une droite AK telle, que l'angle KAB soit égal à l'angle CAD; cette droite est la tangente. Je vais faire voir que l'on peut, par la même construction, mener une tangente en un point quelconque de la courbe.

Soit, en effet, a le point considéré, déterminons l'autre point α de la courbe tel, que

$$Fa.F\alpha = FA.FC,$$

les deux points a et α seront les foyers d'une même conique tangente au quadrilatère. Par ces points, menons des tangentes à la parabole, et soient c, γ les foyers d'une conique inscrite dans le quadrilatère déterminé par ces tangentes, on aura

$$Fc.F\gamma = Fa.F\alpha = FA\ FC;$$

donc les points c et γ appartiennent aussi au lieu des foyers des coniques inscrites au quadrilatère ABCD. Les deux lieux sont donc identiques, et la tangente au point a du second lieu, que l'on construit comme précédemment, sera aussi la tangente au même point du premier lieu.

IV. Théorème de M. Steiner (question 272). a, α; b, β; c, γ étant les foyers de trois coniques inscrites au même quadrilatère, on a la relation

$$\frac{ac.\alpha c}{bc.\beta c}=\frac{a\gamma.\alpha\gamma}{b\gamma.\beta\gamma}.$$

Formons le quadrilatère $ab\alpha\beta$ et désignons toujours par F le foyer de la parabole inscrite au quadrilatère donné ABCD. Les côtés du quadrilatère $ab\alpha\beta$ sont nécessairement tangents à une certaine parabole ayant pour foyer le point F, de sorte que l'on peut considérer c et γ comme les foyers d'une conique inscrite au quadrilatère $ab\alpha\beta$. Or, lorsqu'une conique est inscrite dans un polygone d'un nombre pair de côtés, le produit des distances d'un foyer aux sommets de rang pair, divisé par le produit des distances du même foyer aux sommets de rang impair, donne le même quotient pour l'un et l'autre foyer (*Nouvelles Annales*, t. XII, p. 219).

L'application de ce principe donne le théorème précédent. Dans le cas où le point γ s'éloigne à l'infini, on retrouve un théorème déjà démontré.

V. On démontre encore que si par les points de contact d'une conique inscrite au quadrilatère ABCD, on mène des tangentes à la parabole, elles feront avec la médiane des angles dont le produit des sinus est constant, et cette constante est la même que celle que l'on obtient en menant par les foyers d'une conique inscrite des tangentes à la parabole.

On trouve aussi que le produit des perpendiculaires abaissées du foyer F de la parabole sur les tangentes précédentes est constant, et de là résulte que le produit des distances de ce même foyer aux points de contact d'une conique inscrite est constant et égal au carré du produit des distances de ce foyer à deux sommets opposés du quadrilatère.

J'ajoute encore ici les énoncés de quelques théorèmes analogues aux précédents.

1°. Étant donnés une droite et un point F, décrivons quatre hyperboles équilatères tangentes à la droite et ayant pour centre le point F ; ces hyperboles déterminent un quadrilatère curviligne tel, que le produit des distances du centre à deux sommets opposés est le même pour chaque couple de sommets.

2°. Une cassinoïde et une droite sont données : soient décrites quatre hyperboles équilatères tangentes à la droite ainsi qu'à la cassinoïde et concentriques avec elle. Ces hyperboles déterminent un quadrilatère curviligne tel, que le produit des distances du centre aux points de contact sur la cassinoïde ou sur la droite est constant. La constante reste la même si l'on fait varier la droite et la cassinoïde, pourvu que celle-ci conserve les mêmes foyers.

3°. Soit F le point de rebroussement d'une épicycloïde ordinaire (c'est-à-dire celle qui est engendrée par le point d'une circonférence roulant sur une circonférence égale); menons par ce point quatre cercles tangents à l'épicycloïde ainsi qu'à un cercle donné : le produit des distances du point F aux points de contact sur l'épicycloïde et le cercle est constant et égal au carré du produit des distances du même point à deux sommets opposés du quadrilatère curviligne formé par les cercles tangents.