Nouvelles annales de mathématiques

Brioschi

Méthode pour déterminer les racines communes à deux équations

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 81-83

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__81_1>

MÉTHODE POUR DÉTERMINER LES RACINES COMMUNES A DEUX ÉQUATIONS;

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie

Soient

$$(1)\quad \begin{cases} f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, x + a_n = 0, \\ \varphi(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}\, x + b_m = 0, \end{cases}$$

les deux équations; $x_1, x_2, \ldots x_n$ les racines de la première supposées inégales, et

$$(2)\qquad V = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n).$$

Supposons que les équations (1) aient r (et seulement r) racines communes, on a la proposition suivante :

Théorème. *Les* r *racines communes aux deux équations* (1) *sont les racines de l'équation suivante,*

$$\frac{d^rV}{db_m^r}x^r - r\frac{d^rV}{db_m^{r-1}db_{m-1}}x^{r-1} + \frac{r(r-1)}{2}\frac{d^rV}{db_m^{r-2}db_{m-1}^2}x^{r-2} - \ldots$$
$$-(-1)^r r\frac{d^rV}{db_m\,db_{m-1}^{r-1}}x + (-1)^r\frac{d^rV}{db_{m-1}^r} = 0,$$

ou de la suivante,

$$\frac{d^rV}{da_n^r}x^r - r\frac{d^rV}{da_n^{r-1}\,da_{n-1}}x^{r-1} + \ldots$$
$$-(-1)^r r\frac{d^rV}{da_n\,da_{n-1}^{r-1}}x + (-1)^r\frac{d^rV}{da_{n-1}^{r-1}} = 0.$$

En effet, de l'équation (2) on déduit

$$(3)\left\{\begin{aligned}
&\frac{dV}{db_{s_1}} = x_1^{r_1}V_1 + x_2^{r_2}V_2 + \ldots + x_n^{r_n}V_n,\\
&\frac{d^2V}{db_{s_1}db_{s_2}} = \left(x_1^{r_1}x_2^{r_2} + x_1^{r_2}x_2^{r_1}\right)V_{1,2} + \left(x_1^{r_1}x_3^{r_2} + x_1^{r_2}x_3^{r_1}\right)V_{1,3} + \ldots\\
&\frac{d^3V}{db_{s_1}db_{s_2}db_{s_3}} = \left\{\begin{aligned}&x_3^{r_3}\left(x_1^{r_1}x_2^{r_2} + x_1^{r_2}x_2^{r_1}\right) + x_2^{r_3}\left(x_1^{r_1}x_3^{r_2} + x_1^{r_2}x_3^{r_1}\right)\\ &+ x_1^{r_3}\left(x_2^{r_1}x_3^{r_2} + x_2^{r_2}x_3^{r_1}\right)\end{aligned}\right\}V_{1,2,3} +
\end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite. On a posé

$$V_1 = \frac{V}{\varphi(x_1)},\quad V_{1,2} = \frac{V_1}{\varphi(x_2)},$$
$$V_{1,2,3} = \frac{V_{1,2}}{\varphi(x_3)}\ldots\quad r_1 = m - s_1,\ r_2 = m - s_2, \ldots$$

Si les équations (1) ont une seule racine commune, par exemple x_1, la première des équations (3) donne

$$\frac{dV}{db_{s_1}} = x_1^{r_1}V_1$$

et, par conséquent,

$$\frac{dV}{db_m}x_1 - \frac{dV}{db_{m-1}} = 0,$$

résultat déjà obtenu par M. Richelot.

Si les équations (1) ont deux seules racines x_1, x_2 communes, la seconde des équations (3) donne

$$\frac{d^2 V}{db_{s_1} db_{s_2}} = \left(x_1^{r_1} x_2^{r_2} + x_1^{r_2} x_2^{r_1}\right) V_{1,2},$$

de laquelle

$$\frac{d^2 V}{db^2_m} = 2 V_{1,2}, \quad \frac{d^2 V}{db_m db_{m-1}} = (x_1 + x_2) V_{1,2},$$

$$\frac{d^2 V}{db^2_{m-1}} = 2 x_1 x_2 V_{1,2},$$

et les x_1, x_2 seront les racines de l'équation

$$\frac{d^2 V}{db^2_m} x^2 - 2 \frac{d^2 V}{db_m db_{m-1}} x + \frac{d^2 V}{db^2_{m-1}} = 0.$$

De même, si les équations (1) ont trois seules racines communes x_1, x_2, x_3, de la troisième équation (3), on a

$$\frac{d^3 V}{db^3_m} = 6 V_{1,2,3}, \quad \frac{d^3 V}{db^2_m db_{m-1}} = 2(x_1 + x_2 + x_3) V_{1,2,3},$$

$$\frac{d^3 V}{db\, db^2_{m-1}} = 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) V_{1,2,3}, \quad \frac{d^3 V}{db^3_{m-1}} = x_1 x_2 x_3 V_{1,2,3},$$

et en conséquence les trois racines communes seront les racines de l'équation

$$\frac{d^3 V}{db^3_m} x^3 - 3 \frac{d^3 V}{db^2_m db_{m-1}} x^2 + 3 \frac{d^3 V}{db_m db^2_{m-1}} x - \frac{d^3 V}{db^3_{m-1}} = 0.$$

Le théorème se trouve ainsi démontré par analogie (*).

(*) M. Brioschi a trouve depuis une demonstration rigoureuse.