NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L.-E. FAUCHEUX

Théorie de la division arithmétique des nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 51-55

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__51_0>

THÉORIE DE LA DIVISION ARITHMÉTIQUE DES NOMBRES ENTIERS;

PAR M. L.-E. FAUCHEUX.

Traitée avec la simplicité convenable, la division ne présentera pas aux élèves plus de difficultés que les autres règles arithmétiques.
(*Nouveau Programme de l'École Polytechnique.*)

Lemme. Soit à multiplier deux nombres, par exemple 7436 par 48. On pourra toujours obtenir le produit de la manière suivante. On multipliera d'abord 48 par 6, ce qui donnera 288; on écrira 8 et on retiendra 28. On multipliera ensuite 48 par 3, ce qui donnera 144, à quoi on ajoutera 28 du produit partiel précédent, ce qui donnera 172; on écrira 2 et on retiendra 17. On multipliera 48 par 4, et au produit 192 on ajoutera 17, ce qui donnera 209; on écrira 9 et on retiendra 20. Enfin on multipliera 48 par 7, et au produit 336 on ajoutera 20; on aura 356, qu'on écrira entièrement, et le produit sera 356928.

On pourra toujours considérer le produit d'une multiplication effectuée comme ayant été obtenu par ce procédé-là.

Dans cette multiplication, il n'y a qu'un produit partiel entièrement écrit, c'est le dernier, c'est-à-dire le produit du multiplicateur par le chiffre des plus hautes unités du multiplicande. Des autres produits partiels on n'a écrit que le chiffre des unités; et ce chiffre exprime des unités de même ordre que celles du chiffre du multiplicande qui a donné le produit partiel.

Les retenues de chaque produit partiel n'égaleront jamais le multiplicateur 48; en effet, le premier produit partiel sera au plus $48 \times 9 < 48 \times 10$, ou 48 dizaines; donc les retenues du premier produit partiel seront moindres que 48 ; le deuxième produit partiel sera encore au plus 9×48, et il faudra l'augmenter d'un nombre moindre que 48 ; la somme sera donc plus petite que 10 fois 48 ; donc les retenues du deuxième produit seront aussi moindres que 48, et ainsi de suite.

Ce qui précède sont des remarques qui appartiennent à la multiplication.

Division.

Définition. La division a pour but de trouver un nombre nommé *quotient,* qui, multiplié par un nombre donné nommé *diviseur,* reproduise un troisième nombre aussi donné, nommé *dividende.*

De cette définition résulte comme conséquence qu'on doit employer la division pour partager un nombre donné en parties égales, ou pour chercher combien de fois un nombre en contient un autre.

Soit à diviser 356928 par 48. D'après la définition, nous pouvons regarder le quotient comme étant le multiplicande d'une multiplication dont 48 serait le multiplicateur et 356928 le produit.

Nous avons vu que dans toute multiplication il y avait un produit partiel entièrement écrit, et qu'il n'y en avait qu'un, que c'était le dernier produit partiel, et que, par conséquent, il était exprimé par un certain nombre de chiffres à gauche du produit total. Or il est facile de trouver ce dernier produit partiel dans le produit total 356928.

En effet, dans notre exemple, il a été obtenu par la multiplication de 48, nombre de deux chiffres par un nombre d'un chiffre; il y a donc au plus trois chiffres et au moins deux. C'est donc 356 ou 35 ; mais il est au moins égal à 48 et plus petit que 10 fois 48 ; donc c'est 356.

[De là la règle suivante : Pour trouver le premier chiffre du quotient, il faut prendre au dividende autant de chiffres qu'il y en a au diviseur, si, etc., ou un chiffre de plus, si, etc.]

Ce nombre 356 a été obtenu en multipliant 48 par le chiffre des plus hautes unités du multiplicande qui est le quotient cherché, et augmentant le produit des retenues du produit précédent, retenues qui sont moindres que 48. Donc 356 tombera entre deux multiples consécutifs de 48, et le plus petit de ces deux multiples sera le produit de 48 par le chiffre des plus hautes unités du multiplicande, c'est-à-dire du quotient. Donc si l'on forme le tableau des 9 premiers multiples de 48, celui qui sera immédiatement inférieur ou au plus égal à 356 sera le dernier produit partiel débarrassé des retenues du produit précédent.

```
356928 | 48
336    |-----
------ | 7436
 209
 192
 ----
  172
  144
  ----
   288
   288
   ---
     0
```

1	48
2	96
3	144
4	192
5	240
6	288
7	336
8	384
9	432

En consultant le tableau des multiples de 48, on trouve que le multiple immédiatement inférieur à 356 est le septième, qui est 336; donc le chiffre des plus hautes unités du quotient est 7. Retranchant 336 de 356, le reste 20 représente les retenues, c'est-à-dire les dizaines du produit partiel précédent; de plus, le chiffre des unités de ce produit est le chiffre qui, dans le dividende, est immédiatement à la droite de 356, c'est-à-dire 9 : l'avantdernier produit partiel augmenté des retenues du produit partiel précédent était donc 209. Mais ce produit a été obtenu par la multiplication de 48 par le chiffre du quotient immédiatement à droite de 7; donc on aura ce chiffre en cherchant quel est le multiple de 48 immédiatement inférieur ou au plus égal à 209. On trouve que c'est 192, qui est le quatrième multiple : donc le second chiffre du quotient est 4; et en continuant le même raisonnement on aura successivement tous les chiffres du quotient.

Les différents produits 256, 209, 172, 288, se nomment *dividendes partiels*.

Abréviation. On peut se dispenser de faire le tableau des neuf multiples. En effet, en reprenant l'opération ci-dessus, on voit qu'il s'agit de trouver par quel chiffre il faut multiplier 48 pour avoir 356 ; or ce chiffre *est à peu près* le même que celui par lequel il faudrait multiplier 40 pour avoir 350, lequel est exactement le même que le chiffre par lequel il faudrait multiplier 4 pour avoir 35. Mais ce dernier se trouve immédiatement par la table de Pythagore; donc on pourra se dispenser de former les multiples du diviseur.

On démontrera sans peine que le chiffre ainsi obtenu ne peut être jamais trop faible, mais qu'il peut être exact ou trop fort. Il faudra donc vérifier le chiffre obtenu: ce que l'on fera en le multipliant par le diviseur et retranchant le produit du dividende partiel. Si la soustraction peut se faire, le chiffre trouvé sera le chiffre convenable. Si le produit est plus grand que le dividende partiel, le chiffre trouvé sera trop fort, il faudra diminuer le quotient d'une unité et recommencer l'essai.

Il n'existe pas toujours un nombre entier qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende. Alors le quotient est compris entre deux nombres entiers consécutifs, et en prenant pour quotient l'un ou l'autre de ces deux nombres entiers, on a le quotient, à moins d'une unité. Dans ce cas, le reste de la dernière soustraction n'est pas nul ; on le nomme le *reste* de la division.

Si l'on prend pour quotient le plus petit des deux nombres entiers, on a le quotient par défaut et le reste par excès ; si l'on prend le plus grand des deux nombres, on a le quotient par excès et le reste par défaut. Il est facile de voir que le reste par excès plus le reste par défaut égalent le diviseur.

En choisissant convenablement l'un des deux quotients, on peut obtenir le résultat à moins d'une demi-unité : il suffit de prendre le quotient qui donne le plus petit reste.

On déduira facilement de là, la règle générale ordinaire.

Cette théorie, dont quelques points sont seulement esquissés, est soumise à l'appréciation critique de MM. les Professeurs, et cette Note, tirée à très-petit nombre, leur est uniquement destinée.