NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

YVON VILLARCEAU

Théorie analytique du gyroscope de M. L. Foucault

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 449-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__449_0>

THEORIE ANALYTIQUE DU GYROSCOPE DE M. L. FOUCAULT;

PAR M. YVON VILLARCEAU

(voir page 343).

Intégration de l'équation (47) par les fonctions elliptiques.

8. *Cas de* n *positif.* Soient

$$(48)\qquad \xi = \cos\gamma, \quad \xi_0 = \cos\gamma_0,$$

d'où

$$\sin\gamma\, d\gamma = -\, d\xi,$$

et, par suite,

$$d\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\, d\xi;$$

l'équation (47) donnera

$$(49)\qquad \sqrt{\frac{2g}{a}}\, dt = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi-\xi_0)[1-\delta(\xi+\xi_0)]}}.$$

Désignons par R la valeur du radical du deuxième membre en y comprenant le double signe, et posons

$$(50)\qquad (\xi-\xi_0)[1-\delta(\xi+\xi_0)] = (1-\xi^2)z^2,$$

nous aurons

$$(51)\qquad \mathrm{R} = (1-\xi^2)z.$$

et l'équation à intégrer deviendra

$$(52)\qquad \sqrt{\frac{2g}{a}}\,dt = \frac{d\xi}{R}.$$

Tirons de l'équation (50) la valeur de ξ en z^2, il viendra

$$(53)\qquad \xi(z^2 - \delta) = -\frac{1}{2} + Z,$$

en posant

$$Z^2 = \frac{1}{4}[1 - 4\,\delta\xi_0(1 - \delta\xi_0)] + z^2[\xi_0(1 - \delta\xi_0) - \delta] + z^4$$

ou

$$Z^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\delta\xi_0)^2 + [\xi_0 - \delta(1 + \xi_0^2)]\,z^2 + z^4.$$

Différentiant actuellement l'équation (50), on a

$$[1 + 2\xi(z^2 - \delta)]\,d\xi = 2(1 - \xi^2)\,z\,dz,$$

d'où, en ayant égard aux équations (51) et (53),

$$\frac{d\xi}{R} = \frac{dz}{Z};$$

il s'ensuit

$$(54)\qquad \sqrt{\frac{2g}{a}}\,dt = \frac{dz}{Z}.$$

Nous remarquerons que si l'on néglige les termes en δ, la valeur de Z^2 est plus grande que $\frac{1}{4}\xi_0^2 + \xi_0 z^2 + z^4 = \left(\frac{1}{2}\xi_0 + z^2\right)^2$, quantité essentiellement positive; nous pouvons donc écrire

$$(54\ bis) \qquad Z^2 = \upsilon^2 + 2\upsilon\cos 2\varkappa . z^2 + z^4.$$

Pour identifier cette valeur avec la précédente, il suffit de poser

$$\upsilon^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\delta\xi_0)^2,$$

$$2\upsilon\cos 2\varkappa = \xi_0 - \delta(1 + \xi_0^2),$$

d'où

$$(55) \qquad 2\upsilon = 1 - 2\delta\xi_0,$$

$$\cos 2\varkappa = \frac{\xi_0 - \delta(1 + \xi_0^2)}{1 - 2\delta\xi_0}:$$

on en tire

$$\sin^2\varkappa = \frac{1 - \xi_0 + \delta(1 - 2\xi_0 + \xi_0^2)}{2(1 - 2\delta\xi_0)} = \frac{1 - \xi_0}{2}\,\frac{1 + \delta(1 - \xi_0)}{1 - 2\delta\xi_0},$$

ou bien, à cause de $\xi_0 = \cos\gamma_0$,

$$\sin^2\varkappa = \sin^2\frac{1}{2}\gamma_0\,\frac{1 + 2\delta\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0}{1 - 2\delta\cos\gamma_0}$$

et

$$(56) \qquad \sin\varkappa = \pm\sin\frac{1}{2}\gamma_0\sqrt{\frac{1 + 2\delta\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0}{1 - 2\delta\cos\gamma_0}}.$$

Soit actuellement

$$(57) \qquad z = \sqrt{\upsilon}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi,$$

d'où

$$(58) \qquad dz = \frac{1}{2}\sqrt{\upsilon}\,\frac{d\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi};$$

la valeur de Z^2 (54 *bis*) deviendra

$$Z^2 = v^2 \left(1 + 2\cos 2x \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\varphi + \operatorname{tang}^4\frac{1}{2}\varphi\right)$$

$$= \frac{v^2}{\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\left[\cos^4\frac{1}{2}\varphi + 2(1 - 2\sin^2 x)\sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi + \sin^4\frac{1}{2}\varphi\right]$$

$$= \frac{v^2}{\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\left[\left(\cos^2\frac{1}{2}\varphi + \sin^2\frac{1}{2}\varphi\right)^2 - 4\sin^2 x \sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi\right],$$

et, si l'on pose

$$c^2 = \sin^2 x,$$

on aura simplement

(59) $$Z = \pm \frac{v}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi};$$

il en résultera

(60) $$\frac{dz}{Z} = \pm \frac{1}{2\sqrt{v}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}.$$

A l'aide de cette valeur et de celle de $2v$, l'équation (54) devient

(61) $$dt = \frac{1}{2\sqrt{1 - 2\delta\cos\gamma_0}}\sqrt{\frac{a}{g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}.$$

Nous avons supprimé ici le double signe, attendu que l'élément du temps dt est essentiellement positif et que nous allons disposer de l'angle φ pour que $d\varphi$ le soit pareillement. A cet effet, les équations (50), (55) et (57) donnent

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \pm\sqrt{2\frac{(\xi - \xi_0)[1 - \delta(\xi + \xi_0)]}{(1 - \xi^2)(1 - 2\delta\xi_0)}},$$

ou, en vertu des équations (48),

$$(62)\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \pm\frac{1}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{2(\cos\gamma-\cos\gamma_0)[1-\delta(\cos\gamma+\cos\gamma_0)]}{1-2\delta\cos\gamma_0}}.$$

Cette valeur peut encore s'écrire :

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = \pm\frac{2}{\sin\gamma}\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma_0-\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma)}{1-2\delta\cos\gamma_0}\left[1-2\delta\cos\frac{1}{2}(\gamma_0+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma_0-\gamma)\right]}.$$

Nous avons vu que les valeurs de γ se succèdent dans l'ordre

$$+\gamma_0,\ 0,\ -\gamma_0,\ 0,\ +\gamma_0,\ 0,\ -\gamma_0\ \ldots$$

Pour fixer les idées, supposons $\sin\gamma_0$ positif et écrivons les valeurs correspondantes de $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$, en prenant les signes inférieur ou supérieur suivant que $d\gamma$ est positif ou négatif; inscrivons aussi les signes que prennent ces tangentes dans l'intervalle de deux valeurs consécutives de γ, et nous aurons la suite

$$0\ +\infty\ -0\ +\infty\ -0\ +\infty\ -0,\ldots;$$

les valeurs correspondantes de $\frac{1}{2}\varphi$ seront

$$0,\quad \frac{\pi}{2},\quad \pi,\quad 3\frac{\pi}{2},\quad 2\pi,\quad 5\frac{\pi}{2},\quad 3\pi,\ldots,$$

et celles de φ

$$0,\quad \pi,\quad 2\pi,\quad 3\pi,\quad 4\pi,\quad 5\pi,\quad 6\pi,\ \ldots$$

Le passage de la valeur γ_0 à $-\gamma_0$ et inversement répond à une variation de φ égale à 2π. Si $\sin\gamma_0$ est négatif, on prendra encore dans $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$ les signes inférieur ou supérieur suivant que $d\gamma$ est positif ou négatif, et l'on aura de même une suite ascendante et continue de valeurs de φ.

Intégrons l'équation (61); il viendra, en comptant le temps à partir de l'instant où γ est égal à γ_0 et prenant φ nul à cette époque,

$$(63) \qquad t = \frac{1}{2\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{F}(c, \varphi).$$

Pour avoir la durée de l'oscillation simple, ou entre les limites $+\gamma_0$ et $-\gamma_0$, il faudra faire $\varphi = 2\pi$, d'après ce qui vient d'être dit. Mais on a

$$\mathrm{F}(c, 2\pi) = 4\mathrm{F}\left(c, \frac{\pi}{2}\right);$$

désignant par T la durée de l'oscillation, on aura

$$(64) \qquad \mathrm{T} = \frac{2}{\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}}\sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{F}\left(c, \frac{\pi}{2}\right),$$

équation dans laquelle

$$(65) \qquad c = \pm \sin\frac{1}{2}\gamma_0\sqrt{\frac{1+2\delta\sin^2\frac{1}{2}\gamma_0}{1-2\delta\cos\gamma_0}}.$$

Quand on néglige δ, l'angle du module se réduit à $\pm\frac{1}{2}\gamma_0$, et si l'on suppose d'ailleurs γ_0 infiniment petit, il vient

$$\mathrm{F}(c, \varphi) = \varphi, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{F}\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$$

on retombe alors sur la formule ordinaire du pendule $\mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

9. *Cas de* n *négatif*. Nous avons dit que nous supposerions $\sin n$ positif; $\sin\theta'$ étant d'ailleurs essentiellement positif et ω très-petit par rapport à n, la valeur de a,

première équation (46), devient négative. Dans ce cas, il faut, ainsi que nous l'avons fait voir, que $\cos\gamma - \cos\gamma_0$ soit négatif. De cette manière, l'équation (49) doit être changée en

$$(66)\quad \sqrt{\frac{2g}{-a}}\,dt = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(\xi_0-\xi)[1-\delta(\xi_0+\xi)]}}.$$

En comparant le deuxième membre de cette équation à celui de l'équation (49), on reconnaît que l'on passe de celui-ci à l'autre au moyen d'un changement de signes des quantités ξ, ξ_0 et δ; d'où résulte la nécessité de changer γ en $180^\circ - \gamma$ et γ_0 en $180^\circ - \gamma_0$. De cette manière, les relations (56) et (62) se transforment en

$$(67)\quad \begin{cases} c = \sin\varkappa = \pm \cos\frac{1}{2}\gamma_0 \sqrt{\dfrac{1-2\delta\cos^2\frac{1}{2}\gamma_0}{1-2\delta\cos\gamma_0}} \\ \tang\frac{1}{2}\varphi = \pm\dfrac{1}{\sin\gamma}\sqrt{\dfrac{2(\cos\gamma_0-\cos\gamma)[1-\delta(\cos\gamma_0+\cos\gamma)]}{1-2\delta\cos\gamma_0}}. \end{cases}$$

Dans le cas actuel, les valeurs de γ, en supposant, par exemple, γ_0 positif, se succèdent dans l'ordre

$$\gamma_0,\ \pi,\ 2\pi-\gamma_0,\ \pi,\ \gamma_0,\ \pi,\ 2\pi-\gamma_0,\ \pi,\ \gamma_0,\ldots.$$

Prenant ici le signe supérieur ou inférieur, suivant que $d\varphi$ est positif ou négatif, on aura encore la suite correspondante des valeurs de $\tang\frac{1}{2}\varphi$

$$0+\infty\quad -0\quad +\infty-0+\infty\quad -0\quad +\infty-0\ldots,$$

puis la série suivante des valeurs de $\frac{1}{2}\varphi$

$$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ 3\frac{\pi}{2},\ 2\pi,\ 5\frac{\pi}{2},\ 3\pi,\ 7\frac{\pi}{2},\ 4\pi,\ldots,$$

et celles de φ

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ 6\pi,\ 7\pi,\ 8\pi,\ldots;$$

en sorte que la valeur générale de t (63), se transforme en

$$(68)\qquad t = \frac{1}{2\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}}\sqrt{\frac{-a}{g}}\,F(c,\varphi).$$

La durée d'une oscillation répondant aux limites γ_0 et $2\pi-\gamma_0$ de γ, ou bien aux limites o et 2π de φ comme ci-dessus, il vient, pour la durée T de l'oscillation,

$$(69)\qquad T = \frac{2}{\sqrt{1-2\delta\cos\gamma_0}}\sqrt{\frac{-a}{g}}\,F\left(c,\frac{\pi}{2}\right).$$

En négligeant δ, on voit que l'angle du module c est $90^0-\frac{1}{2}\gamma_0$, il est complémentaire de celui qui répond au cas de n positif. Si l'on suppose γ_0 infiniment petit, le module c devient égal à l'unité, et la fonction $F\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$ infinie; il en résulte que le plan de l'anneau étant mis sans vitesse en coïncidence avec le plan horaire reste dans cette position sans osciller, lorsque n est négatif; mais alors il est en équilibre instable, car pour peu qu'on l'éloigne de cette position, ou, en d'autres termes, quelque petite valeur de γ_0 que l'on détermine, la valeur de T cesse de devenir infinie, elle devient seulement très-grande.

Calcul de α.

10. En ajoutant membre à membre les équations (41) et (42) on trouve

$$\frac{d\alpha}{dt} = n' - \omega\sin\theta'\sin\eta\,(\cos\gamma-\cos\gamma_0) - \cos\eta\,\frac{d\gamma}{dt},$$

d'où l'on tire

$$(70)\qquad \alpha = n't - \gamma\cos\eta - \omega\sin\theta'\sin\eta\int(\cos\gamma-\cos\gamma_0)\,dt.$$

Il s'agit d'effectuer l'intégration indiquée au dernier terme.

Considérons le cas où n et a sont positifs.

On tire de l'équation (62), en ayant égard à la relation (55),

$$(71)\quad \cos\gamma - \cos\gamma_0 = \upsilon \sin^2\gamma \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi + \delta(\cos^2\gamma - \cos^2\gamma_0).$$

A cause de $\xi = \cos\gamma$, les équations (53), (57) et (59) donnent

$$\cos\gamma = \frac{-\frac{1}{2} + Z}{\upsilon \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varphi - \delta} = \frac{-\frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{2}\varphi \pm \upsilon\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}{\upsilon \sin^2\frac{1}{2}\varphi - \delta\cos^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Pour distinguer quel signe il convient de donner au radical, observons que nous devons avoir $\cos\gamma = \cos\gamma_0$ pour $\varphi = 0$, d'après ce qui a été convenu dans les numéros précédents. Or le signe + produit seul ce résultat, car l'équation précédente, en y mettant la valeur de υ, donne alors

$$\cos\gamma = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - 2\delta\cos\gamma_0)}{-\delta} = \cos\gamma_0;$$

on a donc généralement

$$\cos\gamma = \frac{\upsilon\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi} - \frac{1}{2}\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\upsilon\sin^2\frac{1}{2}\varphi - \delta\cos^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Le terme qu'il s'agit d'intégrer étant déjà affecté du facteur ω qui est extrêmement petit relativement à w, nous pouvons négliger δ dans l'expression différentielle, ce qui réduira la valeur de υ à $\frac{1}{2}$; et l'équation (71) donnera

$$\int (\cos\gamma - \cos\gamma_0)\,dt = \frac{1}{2}\int \sin^2\gamma \tang^2 \frac{1}{2}\varphi\, dt.$$

La valeur de $\cos\gamma$ devient elle-même

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi} - \cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi},$$

expression dont l'indétermination, dans le cas de $\varphi = 2i\pi$, est facile à lever ; on en tire

$$\sin^2\gamma = \frac{\sin^4\frac{1}{2}\varphi - \cos^4\frac{1}{2}\varphi - (1 - c^2\sin^2\varphi) + 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}{\sin^4\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \frac{-\left(\cos^2\frac{1}{2}\varphi - \sin^2\frac{1}{2}\varphi\right) - 1 + 4c^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi + 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}{\sin^4\frac{1}{2}\varphi}$$

ou

$$\sin^2\gamma = 2\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin^4\frac{1}{2}\varphi}\left(2c^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi - 1 + \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}\right),$$

et l'intégrale proposée devient

$$\int(\cos\gamma - \cos\gamma_0)\,dt = \int\left[2c^2 - \frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi} + \frac{\sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\right]dt.$$

L'intégrale du premier terme est $2c^2t$. Quant aux autres termes, nous mettrons à la place de dt sa valeur (61) en y négligeant le terme en δ. Soit, pour abréger,

$$\Delta = \sqrt{1 - c^2\sin^2\varphi},$$

il viendra

$$\int(\cos\gamma - \cos\gamma_0)\,dt = 2c^2 t - \sqrt{\frac{a}{g}}\left[\int\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} - \int\frac{d\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\right].$$

La première de ces deux intégrales peut s'écrire

$$\int\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} = \int\frac{1}{1-\cos\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} = \int\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} = \int\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta},$$

il vient donc

$$\int\frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} = \int\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} + \int\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Pour effectuer la première des intégrations indiquées au second membre, différentions l'expression

$$\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\cot\varphi,$$

il viendra

$$\begin{aligned} d.\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\cot\varphi &= -\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} - \frac{c^2\cos^2\varphi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \\ &= -\frac{1-c^2\sin^2\varphi + c^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi \\ &= -\frac{1-c^2\sin^4\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-c^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi, \end{aligned}$$

d'où

$$d.\Delta\cot\varphi = -\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} + c^2\frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi;$$

on en tire

$$\int\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta} = c^2\int\frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi - \Delta\cot\varphi.$$

L'intégrale au second membre est la fonction elliptique que les géomètres allemands substituent à la fonction de deuxième espèce $\int \Delta d\varphi$ de Legendre.

Posons maintenant

$$x = c \sin\varphi,$$

d'où

$$\cos\varphi \, d\varphi = \frac{dx}{c},$$

il viendra, en faisant abstraction de la constante,

$$\int \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{c}{x^2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{c}{x}\sqrt{1 - x^2} = -\frac{\Delta}{\sin\varphi}.$$

On a donc

$$\int \frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} = c^2 \int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta} d\varphi - \frac{\Delta}{\sin\varphi}(1 + \cos\varphi);$$

on a d'ailleurs directement

$$-\int \frac{d\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi} = +\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi} = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Réunissant ces deux intégrales, il vient

$$\int \frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta} - \int \frac{d\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi} = c^2 \int \frac{\sin^2\varphi}{\Delta} d\varphi + \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}(1 - \Delta)$$

Pour éviter l'indétermination qui se présenterait dans le cas de $\sin\varphi = 0$, nous multiplierons haut et bas le dernier terme par $(1 + \Delta)$; il viendra

$$\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi}(1 - \Delta) = \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi} \frac{c^2 \sin^2\varphi}{1 + \Delta} = 2c^2 \frac{\sin\varphi \cos\frac{1}{2}\varphi}{1 + \Delta}.$$

De cette manière, on aura

$$\int(\cos\gamma - \cos\gamma_0)\,dt = 2c^2t - c^2\sqrt{\frac{a}{g}}\left[\int\frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi + \frac{2\sin\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{1+\Delta}\right].$$

Substituant enfin cette valeur dans l'équation (70) et supposant que, pour $t = 0$, on ait $\alpha = 0$, $\gamma = \gamma_0$, $\varphi = 0$, l'expression de α deviendra finalement

$$(72)\quad\left\{\begin{aligned} \alpha &= (w - 2\omega\sin\theta'\sin\eta\, c^2)\,t - (\gamma - \gamma_0)\cos\eta \\ &+ \omega\sin\theta'\sin\eta\, c^2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\Delta}\,d\varphi + \frac{2\sin\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{1+\Delta}\right).\end{aligned}\right.$$

On pourra s'assurer aisément que si la quantité a ou n est négative, il suffira de changer ici les signes de a et des termes en ω, en calculant d'ailleurs le module c et l'amplitude φ au moyen des formules qui conviennent au cas de n négatif.

La formule (72) fait voir que l'angle α, indépendamment de variations périodiques provenant de $(\gamma - \gamma_0)$, du terme en $\sin\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi$ et de la fonction elliptique, subit des variations proportionnelles au temps introduites par cette même fonction elliptique et le terme en c^2t, qui se confondent avec le terme principal wt.

Leur grandeur et leur signe dépendent de la demi-amplitude des oscillations et du sens du mouvement.

La suite prochainement.