NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. D'ARREST

Géométrie sphérique et topographie, théorèmes à démontrer

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 399-402

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__399_1>

GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET TOPOGRAPHIE,

Théorèmes à démontrer.

1. ABC est un triangle sphérique.

m est le centre du cercle inscrit; *r* le rayon sphérique de ce cercle.

μ est le centre du cercle circonscrit; ρ le rayon sphérique de ce cercle.

ρ', ρ'', ρ''' les rayons sphériques des trois cercles ex-inscrits.

s l'aire du triangle, p le périmètre.

On a

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \frac{\cos m\mu}{\sin r \sin \rho},$$

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} \frac{\cos m\mu}{\sin r \sin \rho},$$

$$\sin \frac{1}{2} s = \frac{(\operatorname{tang}\rho . \operatorname{tang}\rho' . \operatorname{tang}\rho'' . \operatorname{tang}\rho''')^{\frac{1}{2}}}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}} = \frac{\sin \frac{1}{2} p \operatorname{tang}\rho}{2 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}}.$$

(H. d'Arrest (*)).

2. Pour un lieu terrestre donné et une déclinaison d'une étoile donnée, le minimum de l'accroissement de l'azimut a lieu lorsque le sinus de la hauteur de l'étoile est égal à la tangente de la moitié de la hauteur dans le premier vertical. (Möbius.)

3. Mêmes données; le minimum de l'accroissement de l'angle parallactique a lieu lorsque le sinus de la hauteur de l'étoile est égal à la tangente de la moitié de la plus grande digression. (H. d'Arrest.)

4. Soit φ la hauteur du pôle pour un lieu donné; δ la déclinaison d'une étoile S; O et O' deux points de l'ho-

(*) Directeur de l'observatoire de Pleissenberg, près Leipzig, elève du celèbre Encke; il est de la colonie de Berlin; provenant de Français exiles par la revocation de l'edit de Nantes : mesure funeste qu'on pourrait caracteriser plus severement et qui entache la fin du siècle de Bossuet et de Fenelon rizon diamétralement opposés au point ortif et au point occase de l'étoile, s étant l'aire du triangle SOO′. Cette aire est constante (LEXELL) et l'on a

$$\tang\frac{s}{4} = \sqrt{\frac{\tang 45° - \frac{\varphi+\delta}{2}}{\tang 45° + \frac{\varphi-\delta}{2}}}.$$

(H. D'ARREST.)

5. Sur le diamètre d'un grand cercle d'une sphère comme axe on décrit une lemniscate, on fait une projection stéréographique de cette lemniscate sur la sphère; cette projection renferme une partie de l'hémisphère; l'aire de la partie restante de l'hémisphère est égale au carré du diamètre de la sphère. (H. D'ARREST.)

6. A, B, C, D, E sont cinq points dans un plan; A, B, C, trois points consécutifs en ligne droite. *Données longueurs* AB, BC, DE; *angles* DAE, DBE, DCE. Construire le quadrilatère ACDE : 1° par un moyen mécanique, 2° par le calcul. (*Problème de topographie.*)

Théorème combinatoire à démontrer.

Soit 1, 2, 3, 4,..., $n-1$ une suite de nombres naturels; représentons par $F_r(n-1)$ l'expression *algébrique* de la somme de ces nombres combinés r à r *et sans répétition.*

Soit 1, 2, 3, 4,..., n une seconde suite de nombres naturels; représentons par $F'_r(n)$ l'expression *algébrique* de la somme de ces nombres combinés r à r *avec répétition.* En changeant dans $F_r(n-1)$, $+n$ dans $-n$, on retrouve la fonction $F'_r(n)$ et, réciproquement, en changeant dans $F'_r(n)$, $+n$ dans $-n$, on obtient $F_r(n-1)$

Exemples :

$$r = 1,$$

$$F_1(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}, \quad F'_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$F_1(-n-1) = \frac{n(n+1)}{2} = F'_1(n),$$

$$F'(-n) = \frac{n(n-1)}{2} = F_1(n-1);$$

$$r = 2,$$

$$F_2(n-1) = \frac{n\; n-1 \,.\, n-2 \,.\, 3n-1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

$$F'_2(n) = \frac{n \,.\, n+1 \; n+2 \,.\, 3n+1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4},$$

$$F_2(-n-1) = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = F'_2(n),$$

$$F'_2(-n) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = F_2(n-1).$$

(OETTINGER.)