Nouvelles annales de mathématiques

Nouvelles propriétés de la loxodromie ; d'après M. H. d'Arrest

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 396-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__396_1>

NOUVELLES PROPRIETES DE LA LOXODROMIE;

D'APRÈS M. H. D'ARREST.

(Astron Nachr 1853, t XXXVI p 311)

I Notations

α, δ coordonnées astronomiques d'un point d une loxodromie passant par l'*origine*.

$A =$ angle constant de la loxodromie avec le méridien

$r =$ rayon de courbure sphérique de la loxodromie au point (α, δ).

α', $\delta' =$ coordonnées du centre du cercle osculateur de la loxodromie au point (α, δ).

$n =$ portion de la normale comprise entre la courbe et l'équateur.

$r' =$ rayon de courbure de la développée au point (α', δ').

n' = portion de la normale au point (α', δ') comprise entre la développée et l'équateur.

A' = angle que fait la développée au point (α', δ') avec le méridien passant par ce point.

s' = longueur d'un arc de la développée.

2. *Formules.*

Équation de la loxodromie passant par l'origine :

(1) $$\log \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\delta}{2}\right) = \alpha \cot A.$$

(2) $$\cot r = -\sin A \operatorname{tang} \delta.$$

(3) $$\alpha' = \alpha \pm \frac{\pi}{2}.$$

(4) $$\operatorname{tang} \delta' = \pm \operatorname{tang} A \operatorname{séc} \delta.$$

(5) $$\operatorname{tang} r \operatorname{tang} n = -\operatorname{coséc}^2 A.$$

(6) $$\cot r' = \frac{\sin A \operatorname{tang} \delta'}{\sin^3 \delta'}.$$

(7) $$\operatorname{tang} r' \operatorname{tang} n' = -\operatorname{coséc}^2 A \sin^4 \delta'.$$

(8) $$\sin A' \sin \delta' = \pm \sin A.$$

(9) $$\operatorname{tang} \delta' = \pm \frac{1}{2} \operatorname{tang} A \left[e^{\left(\alpha' \pm \frac{\pi}{2}\right)\cot A} + e^{-\left(\alpha' \pm \frac{\pi}{2}\right)\cot A} \right],$$

équation de la développée.

(10) $$\cos s' \cos A = \cos \delta'.$$

3. On conclut de l'équation (9) que la développée de la loxodromie n'est pas une loxodromie; elle diffère en cela de la spirale logarithmique.

Si l'on mène les deux cercles parallèles de latitude $+A$ et $-A$ formant deux segments sphériques, l'équation (9) montre que la développée est formée de deux spirales séparées, renfermées chacune dans un des segments et ayant le pôle correspondant pour point asymptotique. Chacune de ces spirales s'étend aussi dans la zone comprise entre les parallèles.

4. Le cône qui a pour centre celui de la sphère et pour base la développée de la loxodromie coupe le cylindre qui touche la sphère suivant l'équateur en une certaine ligne courbe; développant le cylindre, la ligne courbe devient plane et a pour équation

$$y = \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right),$$

équation de la caténaire.

5. A étant toujours l'angle constant, supposons qu'un point décrive sur la sphère une courbe qui coupe chaque méridien suivant un angle A′ tel, que l'on ait la relation

$$\operatorname{tang} A' = \operatorname{tang} A \sin \delta\,;$$

l'équation de cette courbe sera

$$(a) \qquad \log \cos \delta = \alpha \cot A:$$

la projection orthogonale de cette courbe sur l'équateur a pour équation polaire

$$\rho = e^{\alpha \cot A},$$

c'est une spirale logarithmique.

L'équation de la normale sphérique à la courbe (a) est

$$\operatorname{tang} \delta' = \operatorname{tang} \delta \left[\cos(\alpha - \alpha') - \operatorname{tang} A \sin(\alpha - \alpha') \right],$$

où α', δ' représentent les coordonnées courantes.

Faisant

$$\delta' = 0,$$

on obtient

$$\operatorname{tang} \text{sous-normale} = \cot A.$$

Ainsi la sous-normale est constante, ce qui n'a pas lieu pour la parabole sphérique.

6. Rappelons ces formules générales données par Gudermann.

Soient

$$f(\alpha, \delta) = 0$$

l'équation d'une courbe tracée sur la sphère; r le rayon de courbure; α', δ' les coordonnées du centre de courbure correspondant au point α, δ.

Posons

$$\frac{d\alpha}{d\delta} = \gamma, \quad 1 + \gamma^2 \cos^2 = \lambda, \quad \chi^2 \cos\delta - \gamma \sin\delta = \mu,$$

$$\gamma\lambda \sin\delta = \nu,$$

on a

$$\operatorname{tang}(\alpha - \alpha') = -\frac{\lambda}{\mu\cos\delta}, \quad \sin\delta' = \frac{\mu\sin\delta - \gamma\lambda}{(\lambda^2 + \mu^2 + \gamma^2\lambda^3 - 2\mu\nu)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\operatorname{tang} r = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{\nu - \mu}.$$

On trouve ces formules dans la *Sphérique analytique* de Gudermann; Cologne, 1830.