THÉODORE PARMENTIER

Comparaison de quelques méthodes de quadrature et formule nouvelle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 370-384

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__370_1>

COMPARAISON DE QUELQUES MÉTHODES DE QUADRATURE ET FORMULE NOUVELLE;

PAR M. THÉODORE PARMENTIER,
Ancien élève de l'École Polytechnique, Capitaine du Génie (*).

De tout temps les géomètres se sont préoccupés de la recherche de formules d'approximation pour calculer l'aire des courbes planes. Ces formules sont de la plus grande utilité pratique; car, dans l'état actuel de nos connaissances, le nombre des fonctions intégrables est fort limité, et d'ailleurs on a bien souvent à considérer des courbes irrégulières qui ne peuvent être représentées par une fonction algébrique, telle par exemple que le périmètre de la section d'un cours d'eau ou une courbe dynamométrique dont l'aire représente le travail d'une machine ou d'un moteur.

On sait que l'aire comprise entre l'axe des abscisses de

(*) Aide de camp du général Niel, en Crimée.

la courbe $y = f(x)$ et les deux ordonnées

$$y_0 = f(x_0), \quad y_m = f(x_m)$$

est représentée par l'intégrale définie

$$S = \int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx.$$

Les méthodes de quadrature ont pour but de déterminer une valeur plus ou moins approchée de l'aire S dans le cas où la différentielle $f(x)\,dx$ n'est pas intégrable, ou lorsque la forme de la fonction $f(x)$ n'est pas connue et que l'on peut seulement se procurer la connaissance d'un certain nombre de valeurs particulières de cette fonction correspondant à des valeurs de x, généralement équidifférentes, comprises entre x_0 et x_m. En d'autres termes, on divise l'aire S en un certain nombre de trapèzes curvilignes déterminés par des ordonnées équidistantes, et il s'agit de trouver une valeur approchée de la surface de plusieurs de ces trapèzes consécutifs, exprimée à l'aide des différentes ordonnées formant les bases des trapèzes et de leur hauteur commune.

La première idée qui se présente, c'est de remplacer les trapèzes curvilignes par des trapèzes rectilignes en joignant deux à deux par des cordes les extrémités des différentes ordonnées. L'aire du polygone inscrit sera représentée par la formule

$$(1) \qquad A = h\left[\sum y - \frac{1}{2}(y_0 + y_m)\right],$$

dans laquelle h représente la commune hauteur des différents trapèzes, y_0 et y_m les ordonnées extrêmes, et $\sum y$ la somme de toutes les ordonnées. Cette formule est simple, mais ne donne qu'une approximation assez grossière.

En remplaçant l'aire de la courbe par celle d'un polygone circonscrit formé au moyen de tangentes menées à l'extrémité des ordonnées élevées au milieu de la base de chaque trapèze, on obtient la formule très-simple

$$(2) \qquad A = h \cdot \sum y.$$

Il est facile de déduire de simples considérations géométriques que cette dernière formule conduit toujours à un résultat plus approché de la valeur exacte de l'aire S que la formule (1), et comme elle a en outre l'avantage d'une plus grande simplicité, elle doit toujours être préférée.

Le géomètre anglais Thomas Simpson a cherché à obtenir une plus grande approximation en substituant à la courbe dont on cherche l'aire une suite d'arcs de paraboles du second degré à axes parallèles aux ordonnées : ce qui l'a conduit à la formule suivante, à laquelle il a attaché son nom et qui constitue encore aujourd'hui l'une des méthodes de quadrature les plus usitées,

$$(3) \qquad A = \frac{1}{3} h \left[\begin{array}{l} y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) \\ \qquad + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) \end{array} \right],$$

$y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ représentant les valeurs numériques des $2n+1$ ordonnées distantes l'une de l'autre de la longueur constante h. Cette formule donne, en général, des résultats plus approchés que la méthode des tangentes ; mais on ne peut pas affirmer *à priori* qu'il en est ainsi. Si l'on cherche, par exemple, l'aire du quart de cercle d'un rayon égal à 10, en partageant le rayon en dix parties égales, la formule (2) donne

$$A = 78,809,$$

et la formule (3)

$$A = 78,173.$$

Or la vraie valeur de l'aire est

$$S = 78,540.$$

L'erreur *en plus* à laquelle conduit la méthode des tangentes est donc moindre que l'erreur *en moins* que donne la formule de Simpson. L'aire de la parabole

$$y^2 = 9 . x$$

entre l'axe des abscisses, la courbe et les ordonnées correspondant à $x = 0$ et $x = 10$, a pour valeur exacte

$$\frac{2}{3} 10 \times \sqrt{90} = 63,246.$$

En partageant la base en dix parties égales, la formule (2) conduit à

$$A = 63,408,$$

et la formule (3) à

$$A = 63,001.$$

L'avantage est donc encore à la méthode des tangentes. Il en serait de même en calculant, au moyen de dix ordonnées, l'aire du quart de l'ellipse, ou celle de l'arc de l'hyperbole $y = \sqrt{20 . x + x^2}$ entre le sommet et l'ordonnée correspondant à $x = 10$. Mais si l'on cherche l'aire comprise entre l'axe des abscisses, l'hyperbole $xy = 1$ et les ordonnées correspondant à $x = 1$ et $x = 2$, aire dont la vraie valeur est

$$S = \log \text{nép. } 2 = 0,693147,$$

on trouve que la formule (2) conduit, au moyen de dix ordonnées, à la valeur

$$A = 0,692835,$$

et la formule (3) à la valeur beaucoup plus approchée

$$A = 0,693150.$$

Je pense que la formule de Simpson doit, en général, être préférée à la méthode des tangentes, mais il me paraît difficile de les comparer entre elles et de décider, *à priori*, dans quel cas l'une doit l'emporter sur l'autre.

M. Catalan, remarquant que les différents axes de parabole de la méthode de Simpson ne se touchent qu'en un point et forment ainsi des jarrets, a pensé que l'on obtiendrait une formule plus exacte en faisant recroiser deux arcs consécutifs de manière à leur donner deux points communs. Après avoir mené un premier arc de parabole à axe parallèle aux ordonnées, par les extrémités des trois premières ordonnées, on ne conserve de cette ligne que la partie comprise entre les deux premières ordonnées; puis on fait passer un second arc de parabole par les extrémités des deuxième, troisième et quatrième ordonnées, et ainsi de suite, en conservant l'arc entier pour les trois dernières ordonnées. Pour donner de la symétrie à l'expression de l'aire de la courbe ainsi formée, M. Catalan refait la même construction dans l'ordre inverse, puis il prend la moyenne des deux aires. Il arrive ainsi à la formule

$$(4)\qquad A = h\left[\begin{array}{l}\sum y - \frac{5}{8}(y_0 - y_n) + \frac{1}{6}(y_1 + y_{n-1}) \\ \qquad - \frac{1}{24}(y_2 + y_{n-2})\end{array}\right],$$

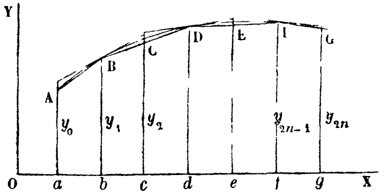
h représentant l'équidistance des ordonnées et $\sum y$ la somme des n ordonnées $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ (*).

(*) Voyez les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. X, p. 412.

M. Catalan pense que cette formule pourra presque toujours être préférée à celle de Simpson. La plus grande continuité donnée à la suite des arcs paraboliques semble, en effet, favorable à la formule (4). Pourtant on ne peut rien affirmer à cet égard. En comparant les deux formules dans le cas des cinq aires dont il a été question ci-dessus, on trouvera que l'avantage est toujours à la formule de Simpson. Cette dernière étant d'ailleurs plus simple, je pense qu'il n'y a pas avantage à lui substituer la formule (4).

Passons à la formule de M. le général Poncelet. L'aire d'une courbe étant comprise entre celle du polygone inscrit formé par une suite de cordes, et celle du polygone circonscrit formé par une suite de tangentes, il était naturel de penser qu'en général la moyenne arithmétique entre ces deux aires s'approcherait plus que chacune d'elles de l'aire de la courbe. C'est sur cette considération qu'est fondée la méthode mixte entre celle des tangentes et des cordes, exposée par M. Poncelet dans ses Leçons à la Faculté des Sciences de Paris.

Soit $aAGg$ l'aire à calculer.



On forme un polygone circonscrit à la courbe en menant des tangentes aux extrémités de toutes les ordonnées $y_1, y_3, \ldots, y_{2n-1}$ de rang pair, et un polygone inscrit, en joignant d'abord les extrémités A et B des deux premières ordonnées, et les extrémités F et G des deux dernières, puis menant les cordes de contact BD, DF, etc., du polygone circonscrit. Il est facile de voir maintenant que l'aire du polygone inscrit est exprimée par

$$h\frac{(y_0+y_1)}{2}+2h\frac{(y_1+y_3)}{2}+2h\frac{(y_3+y_5)}{2}+\ldots$$
$$+2h\frac{(y_{2n-3}+y_{2n-1})}{2}+h\frac{(y_{2n-1}+y_{2n})}{2},$$

ou

$$h\left(2\sum y_i+\frac{y_0+y_{2n}}{2}-\frac{y_1+y_{2n-1}}{2}\right),$$

et que l'aire du polygone circonscrit a pour expression

$$2h(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})=2h\sum y_i,$$

h représentant toujours l'équidistance des ordonnées et $\sum y_i$ la somme des ordonnées de rang pair (ou d'indice *impair*). La moyenne arithmétique entre ces deux aires donne pour l'aire approchée de la courbe

$$(5)\qquad S=h\left(2\sum y_i+\frac{y_0+y_{2n}}{4}-\frac{y_1+y_{2n-1}}{4}\right)\ (*).$$

Cette formule conduit fort souvent à une très-grande approximation si on l'applique, par exemple, à la détermination de l'aire du quart de cercle de rayon 10; on trouve, en divisant le rayon en dix parties égales,

$$S=78,403,$$

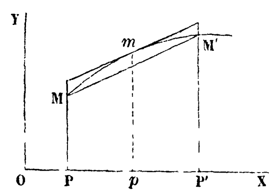
valeur plus approchée que celles que donnent les formules (2), (3) et (4). Il est à observer, en outre, qu'au

(*) *Voyez*, pour plus de developpements, les *Éléments de Mécanique* de H. Resal, pages 28-31 lieu de dix ou onze ordonnées qu'ont exigées ces dernières, on n'en a eu que sept à calculer pour appliquer la formule de M. Poncelet à ce cas particulier. L'approximation eût donc été plus grande encore, si l'on avait, comme l'eût exigé la comparaison équitable des diverses méthodes, partagé le rayon du quart de cercle en seize parties égales, afin d'avoir aussi dix ordonnées à calculer.

On peut se rendre compte, par l'analyse, de la valeur comparative de la méthode des cordes, de celle des tangentes et de celle de M. Poncelet.

Considérons, en effet, un élément MM′ de la courbe

$$y = f(x).$$



Soient

$$\mathrm{OP} = x_0, \quad \mathrm{PP'} = 2\Delta x,$$

et menons la corde MM′, ainsi que la tangente au point m correspondant au milieu de PP′. L'aire PMM′P′ de la courbe aura pour expression

$$\mathrm{S} = \int_{x_0}^{x_0 + 2\Delta x} y\,dx,$$

ou, en posant $x = x_0 + x'$,

$$\mathrm{S} = \int_{x'=0}^{x'=2\Delta x} dx f(x_0 + x');$$

mais on a

$$f(x_0+x') = f(x_0) + x' f'(x_0) + \frac{x'^2}{2} f''(x_0) + \frac{x'^3}{2.3} f'''(x_0) + \ldots,$$

et, par suite,

$$\int dx f(x_0+x') = x' f(x_0) + \frac{x'^2}{2} f'(x_0) + \frac{x'^3}{2.3} f''(x_0) + \ldots,$$

et

$$\int_{x'=0}^{x'=2\Delta x} dx f(x_0+x') = 2\Delta x f(x_0) + \frac{4(\Delta x^2)}{2} f'(x_0) + \frac{8(\Delta x)^3}{2.3} f''(x_0) + \ldots,$$

ou enfin

$$S = 2\Delta x f(x_0) + 2(\Delta x)^2 f'(x_0) + \frac{4}{3}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots,$$

et l'on sait que ces séries sont toujours convergentes, si $2\Delta x$ est suffisamment petit et si $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, etc., sont limités. Il est facile de voir, d'un autre côté, que l'aire du trapèze inscrit a pour expression

$$A = \Delta x [f(x_0 + 2\Delta x) + f(x_0)],$$

ou, en développant $f(x_0 + 2\Delta x)$ en série,

$$A = 2\Delta x f(x_0) + 2(\Delta x)^2 f'(x_0) + 2(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots$$

Pareillement, l'aire du trapèze circonscrit, qui est égale à

$$2\Delta x f(x_0 + \Delta x),$$

peut être mise sous la forme

$$A' = 2\Delta x f(x_0) + 2(\Delta x)^2 f'(x_0) + (\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots$$

On a donc

$$S - A = -\frac{2}{3}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots ,$$

et

$$S - A' = \frac{1}{3}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots$$

On voit par là que si les éléments dans lesquels on a partagé la courbe sont assez petits pour que les termes qui renferment Δx à une puissance supérieure à la troisième puissent être négligés devant $(\Delta x)^3$, la méthode des tangentes conduit à une erreur qui est juste moitié moindre que celle à laquelle on arrive par la méthode des cordes (*).

La moyenne arithmétique entre le trapèze inscrit et le trapèze circonscrit a pour expression

$$M = \frac{A + A'}{2} = 2\Delta x f(x_0) + 2(\Delta x)^2 f'(x_0) + \frac{3}{2}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots ;$$

on a donc

$$S - M = -\frac{1}{6}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots ,$$

ce qui montre que, lorsque Δx est assez petit, cette moyenne donne la valeur approchée de S avec une erreur moitié moindre que celle résultant de l'aire circonscrite, et quatre fois plus faible que celle à laquelle conduit l'aire inscrite. Mais, pour obtenir cette moyenne, on serait obligé de calculer un nombre double d'ordonnées puisque les ordonnées du polygone inscrit ne correspon-

(*) Cette conclusion semble supposer que $f(x_0)$ n'est pas nulle; mais il est facile de voir, en calculant les termes suivants du developpement de $S - A$ et de $S - A'$, qu'elle subsisterait encore dans le cas particulier de $f''(x_0) = 0$. Si $f'''(x_0)$ etait aussi nulle ou si plusieurs des derivees $f'''(x_0)$, $f^{\text{IV}}(x_0)$, etc., etaient nulles à la fois, l'avantage de la methode des tangentes sur celle des cordes n'en serait que plus grand.

dent pas à celles du polygone circonscrit. On a vu de quelle manière ingénieuse M. Poncelet a évité cet inconvénient, et quoiqu'on ne puisse pas appliquer à sa formule le résultat comparatif que nous venons d'obtenir, puisque les cordes et les tangentes ne sont pas disposées de la même manière sur les deux figures ci-dessus, on conçoit néanmoins qu'elle doit conduire à une approximation supérieure à celle que donnent les deux autres méthodes, On vient de voir que la différence entre l'aire de la courbe et celle du polygone inscrit tend à devenir double de la différence qu'il y a entre l'aire de la courbe et celle du polygone circonscrit. On arriverait donc à une plus grande approximation si, au lieu de prendre pour l'aire approchée de la courbe $\frac{A + A'}{2}$, on prenait $\frac{A + 2A'}{3}$, car ce serait la véritable expression de l'aire de la courbe, si les termes renfermant Δx à une puissance supérieure à la troisième étaient réellement négligeables. On a, en effet,

$$\frac{A + 2A'}{3} = 2\Delta x f(x_0) + 2(\Delta x)^2 f'(x_0) + \frac{4}{3}(\Delta x)^3 f''(x_0) + \ldots,$$

expression qui ne diffère de la valeur de S que par des termes renfermant Δx à des puissances supérieures à la troisième (et même à la *quatrième*, comme on le verrait en calculant un plus grand nombre de termes). Cette considération m'a permis de modifier avantageusement la formule de M. Poncelet. Reprenons, à cet effet, les valeurs des aires inscrites et circonscrites de la première des deux figures ci-dessus,

$$A = h\left(2\sum y_i + \frac{y_i + y_i}{2} - \frac{y_i + y_{n-1}}{2}\right),$$

et

$$A' = 2h \sum y_i.$$

Mais, au lieu de prendre, comme M. Poncelet, la moyenne arithmétique entre ces valeurs, prenons pour l'aire S de la courbe l'expression $\frac{A + 2A'}{3}$, on aura

$$S = h\left(2\sum y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{2} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{2}\right) + \frac{4}{3}h\sum y_i,$$

ou

$$(6) \qquad S = h\left(2\sum y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{6} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{6}\right).$$

Cette nouvelle formule, qui n'est pas plus compliquée que celle de M. Poncelet et qui est beaucoup plus approchée, doit donc lui être toujours préférée (*).

Appliquons les considérations analytiques qui précèdent à un exemple numérique, celui de l'aire comprise entre l'arc de l'hyperbole équilatère $xy = 1$ et l'axe des abscisses, entre les limites $x = 1$ et $x = 2$, aire dont la valeur exacte est le logarithme népérien de 2 ou

$$S = 0,69314718.$$

(*) M. le général Poncelet, auquel j'ai soumis ce petit travail qu'il a bien voulu approuver sans restriction, m'a fait observer que l'on peut justifier cette nouvelle méthode de quadrature par cette considération purement géométrique, qu'à mesure que l'élément d'arc considéré diminue, la corde MM' (de la deuxième figure) tend à devenir parallèle à la tangente TT', en même temps que l'arc se rapproche indéfiniment de celui d'une parabole de second degré, de sorte que le segment intérieur MmM' converge vers les $\frac{2}{3}$ du trapèze MTT'M', considéré à la limite comme un véritable parallélogramme ; ce qui s'accorde entièrement avec les considérations analytiques sur lesquelles repose la formule (6).

En supposant la base partagée en dix parties égales, la méthode des cordes conduit à la valeur

$$A = 0,693971$$

et celle des tangentes à

$$A' = 0,692835.$$

On a donc

$$S - A = - 0,000624 \ldots$$

et

$$S - A' = 0,000312 \ldots,$$

ce qui fait voir qu'en s'arrêtant à la sixième décimale, $\Delta x = 0,1$ est assez petit pour que les termes du développement en série qui renferment Δx à une puissance supérieure à la troisième puissent être négligés.

En prenant la moyenne arithmétique entre A et A', on trouve

$$M = \frac{A + A'}{2} = 0,693033$$

et

$$S - M = - 0,000156,$$

ce qui est (en valeur absolue) la moitié de S — A', ainsi qu'on devait s'y attendre.

Enfin,

$$M' = \frac{A + 2A'}{3} = 0,693147,$$

ce qui ne diffère de la valeur de S qu'au delà de la sixième décimale et présente, par conséquent, une approximation bien supérieure à toutes celles qui précèdent.

Mais, comme je l'ai déjà dit, il est à remarquer que le calcul de M et de M' serait deux fois plus long que celui de A ou de A', et que l'on pourrait, par conséquent, dans le même temps calculer A′ en prenant Δx deux fois plus petit, ce qui donnerait peut-être l'avantage à cette dernière expression. Appliquons donc notre exemple à la formule de M. Poncelet ; la valeur de l'aire sera

$$S' = 0,693523,$$

et, par suite,

$$S \quad S' = -0,000376.$$

On voit que l'erreur est un peu plus grande que S — A′ et qu'elle est plus du double de S — M : mais cela tient à ce qu'en conservant la division de la base en dix parties égales, on a réellement pris Δx deux fois plus grand, comme il est facile de le voir sur la première figure, et que, sans avoir plus d'ordonnées à calculer, on aurait pu diviser la base en seize parties égales, auquel cas la formule du général Poncelet aurait sans doute eu l'avantage sur la méthode des tangentes.

La nouvelle formule (6) conduit à la valeur

$$S'' = 0,692984,$$

et l'on a, par suite,

$$S - S'' = -0,000163,$$

erreur notablement plus faible que S — S′.

Quant à la comparaison analytique entre la formule de M. Poncelet ou la formule (6) d'une part, et entre celle de Simpson ou la formule (4) d'autre part, elle me paraît fort difficile à faire, et je ne puis me prononcer sur leur mérite relatif. Je pense néanmoins qu'en général la nouvelle formule que je propose ne le cède pas en exactitude à celle de Thomas Simpson. Cette dernière, qui donne l'aire exacte dans le cas particulier d'une parabole du second degré à axe parallèle aux ordonnées, peut conduire, comme nous l'avons vu, à des résultats moins satisfaisants que la méthode des tangentes, tandis que la formule de M. Poncelet et à fortiori la formule (6) sont évidemment préférables à la méthode des tangentes.