

J. MURENT

Seconde solution de la question 300

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14 (1855), p. 368-370

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__368_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 500

(voir page 254),

PAR M. J. MURENT,
Licencié ès Sciences.

PROBLÈME. *Trouver une fonction de a, b, c, d telle, qu'en y faisant $b = a$ elle devienne $\frac{c-d}{2(c+d)}$, et en y faisant $d = c$ elle devienne $\frac{a-b}{2(a+b)}$.* LEIBNITZ.

Solution. Désignons par $F(a, b, c, d)$ la fonction demandée. Cette fonction devant se réduire à $\frac{c-d}{2(c+d)}$

lorsqu'on y fait $b = a$, sera de la forme

$$(1) \quad \mathbf{F}(a, b, c, d) = \frac{c-d}{2(c+d)} + (a-b)f(a, b, c, d),$$

f étant une fonction inconnue qui ne devient pas infinie lorsque $b = a$. Afin de déterminer cette fonction f , faisons $d = c$ dans l'égalité (1). Le premier membre devra, d'après l'énoncé, se réduire à $\frac{a-b}{2(a+b)}$, et nous aurons

$$\frac{a-b}{2(a+b)} = (a-b)f(a, b, c, c),$$

et, par suite,

$$f(a, b, c, c) = \frac{1}{2(a+b)}.$$

Cette relation montre que la fonction $f(a, b, c, d)$ doit être telle, qu'elle devienne $\frac{1}{2(a+b)}$, lorsqu'on y fait $d = c$: donc cette fonction est de la forme

$$f(a, b, c, d) = \frac{1}{2(a+b)} + (c-d)\varphi(a, b, c, d);$$

φ étant une nouvelle fonction qui ne devient pas infinie pour $d = c$. On voit de plus, par cette dernière égalité, que φ doit aussi rester finie pour $b = a$ puisqu'il en est ainsi de la fonction f .

Substituant la dernière valeur de f dans l'égalité (1), il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(a, b, c, d) &= \frac{c-d}{2(c+d)} \\ &+ \frac{a-b}{2(a+b)} + (a-b)(c-d)\varphi(a, b, c, d), \end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$F(a, b, c, d) = \frac{ac - bd}{(a + b)(c + d)} \\ + (a - b)(c - d)\varphi(a, b, c, d).$$

Cette formule donnera une infinité de fonctions satisfaisant aux conditions de l'énoncé; il suffira de prendre pour φ une fonction quelconque de a, b, c, d , qui ne devienne infinie ni pour $b = a$, ni pour $d = c$.

L'expression $\frac{ac - bd}{(a + b)(c + d)}$ sera la plus simple des fonctions qui répondent à la question.