J. Murent

Solution de la question 303

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 365-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__365_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 303

(voir page 211);

PAR M. J. MURENT,
Licencié ès Sciences (Clermont-Ferrand).

PROBLÈME. *Quelles conditions doit remplir un quadrilatère pour que tous les rectangles circonscrits soient semblables à un rectangle donné. Quel est le lieu géométrique des centres de ces rectangles?*

Solution. 1°. Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales se coupent en un point O. Ce quadrilatère sera déterminé si l'on suppose donnés l'angle θ des diagonales et les grandeurs a, b, c, d des segments OA, OB, OC, OD de ces diagonales. Menons par le point A une droite MQ faisant avec la diagonale CA un angle quelconque φ, et construisons le rectangle circonscrit MNPQ dont un côté est dirigé suivant la ligne MQ. En traçant, par le point O, des parallèles aux côtés du rectangle, on trouve facilement que les longueurs de ces côtés sont $(a+c)\sin\varphi$ et $(b+d)\cos(\theta-\varphi)$, ou plus simplement $D\sin\varphi$ et $D'\cos(\theta-\varphi)$, en désignant par D et D' les diagonales entières AC, BD.

Pour que le rectangle MNPQ soit semblable au rectangle donné dont nous représenterons les deux dimensions par C et C', il faut que l'on ait la proportion

$$\frac{D\sin\varphi}{D'\cos(\theta-\varphi)}=\frac{C}{C'},$$

et pour que la similitude existe pour tous les rectangles circonscrits, il faut que cette relation ait lieu pour toute valeur donnée à φ. Or, cette même relation développée, pouvant s'écrire sous la forme

$$(CD'\sin\theta-DC')\tang\varphi+CD'\cos\theta=0,$$

ne sera satisfaite, quel que soit φ, que si l'on a simultanément

$$CD'\cos\theta=0 \quad \text{et} \quad CD'\sin\theta-DC'=0,$$

d'où l'on déduit

$$\theta=90^\circ \quad \text{et} \quad \frac{D}{D'}=\frac{C}{C'}.$$

Ainsi, pour qu'un quadrilatère satisfasse aux conditions de l'énoncé, il faut et il suffit que ses diagonales fassent entre elles un angle droit et soient proportionnelles aux deux dimensions du rectangle donné.

On voit qu'il existe une infinité de quadrilatères possédant la propriété énoncée.

2°. *Lieu des centres*. Considérons un quadrilatère ABCD construit suivant les conditions que l'on vient de trouver : ses diagonales seront perpendiculaires entre elles et nous les prendrons pour axes coordonnés, les x et les y positives étant dirigées suivant OA et OB. Construisons le rectangle circonscrit MNPQ, dont le côté MAQ fait avec l'axe des x un angle quelconque φ, le point M étant situé dans l'angle des coordonnées positives.

Cela posé, il est facile de reconnaître que le centre du rectangle doit se trouver au point d'intersection des deux droites menées respectivement par les milieux des diagonales AC et BD du quadrilatère, parallèlement aux côtés MQ et MN du rectangle. Or le milieu de AC ayant pour abscisse $\frac{a-c}{2}$ et le milieu de BD ayant pour ordonnée $\frac{b-d}{2}$, les équations des deux droites sont

$$y = \operatorname{tang}\varphi . \left(x - \frac{a-c}{2}\right)$$

et

$$y - \frac{b-d}{2} = -\frac{1}{\operatorname{tang}\varphi} . x.$$

Ces deux équations étant satisfaites par les coordonnées du centre du rectangle MNPQ, si l'on élimine entre elles l'angle φ, l'équation finale aura lieu entre les coordonnées du centre d'un rectangle circonscrit quelconque, et représentera, par conséquent, le lieu des centres de tous les rectangles circonscrits.

Pour éliminer φ, il suffit de multiplier membre à membre les deux équations, et l'on aura, en transposant,

$$y\left(y - \frac{b-d}{2}\right) + x\left(x - \frac{a-c}{2}\right) = 0$$

C'est l'équation d'un cercle qui passe par l'origine et par les points

$$x = \frac{a-c}{2}, \quad y = 0$$

et

$$x = 0, \quad y = \frac{b-d}{2},$$

c'est-à-dire par les points milieux des diagonales AC, BD.

Ainsi le lieu cherché est le cercle décrit en prenant pour diamètre la ligne qui joint les milieux des diagonales du quadrilatère.

Remarque. On peut prendre pour quadrilatère un losange; on a alors

$$a = c \quad \text{et} \quad b = d,$$

l'équation du lieu devient

$$y^2 + x^2 = 0,$$

et le lieu se réduit à un point, centre du losange.