PAINVIN

Solution de la question 299

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 257-258

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__257_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 299

(voir page 137),

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences mathématiques.

Pour démontrer la proposition, il suffit de faire voir qu'on obtient des restes, tous différents, en divisant par p les nombres, soit d'une même ligne horizontale, soit d'une même ligne verticale, soit d'une même diago-

(*) Prochainement une autre solution très-simple par M. Murent.

nale. En effet, deux termes quelconques d'une même ligne sont de la forme

$$k + qr, \quad k' + q'r,$$

où

$$k \text{ ou } k' \leqq p, \quad q \text{ ou } q' \leqq p - 1, \quad r \leqq p - 2,$$

et où

1°. k' est différent de k et $q' = q$, pour les lignes horizontales;

2°. $k' = k$ et q' est différent de q, pour les lignes verticales;

3°. $q = k - 1$ et $q' = k' - 1$, pour la diagonale partant du sommet supérieur à gauche;

4°. $q = p - k$ et $q' = p - k'$, pour la diagonale partant du sommet inférieur à gauche.

Or, si Q et Q', R et R' sont les quotients et les restes respectifs de la division de $k + qr$ et $k' + q'r$ par p, on aura

$$k + qr = \mathrm{Q}p + \mathrm{R}, \quad k' + q'r = \mathrm{Q}'p + \mathrm{R}';$$

si l'on supposait $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$, on déduirait de ces égalités

$$k' - k + (q' - q)r = (\mathrm{Q}' - \mathrm{Q})p.$$

Or cette équation est impossible dans les quatre cas précités, puisque p, nombre premier, diviserait le second membre sans pouvoir diviser le second.

Le raisonnement est en défaut pour l'hypothèse particulière

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}' = 0;$$

mais alors les restes sont respectivement égaux aux nombres eux-mêmes $k + qr$, $k' + q'r$, lesquels sont inégaux, comme il est facile de s'en assurer dans chacune des hypothèses précédemment énoncées.