ANGELO GENOCCHI

Démonstration d'un théorème de M. Brioschi (voir t. XIII, p. 352, et t. XIV, p. 96)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 246-248

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__246_1>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. BRIOSCHI

(voir t. XIII, p 352, et t. XIV, p. 96);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

Soit l'équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

et nommons S_r la somme des $r^{\text{ièmes}}$ puissances de ses racines. Les formules connues de Newton montrent que S_r est une fonction entière des coefficients a_i, et que la puissance a_1^r s'y trouve multipliée par $(-1)^r$, car on trouve

$$S_1 = -a_1, \quad S_2 = a_1^2 - 2a_2, \quad S_3 = -a_1^3 + \ldots,$$

et l'on reconnaît sans peine la généralité de cette loi. Mais si l'on fait

$$x_0 = \frac{1}{S_r}, \quad x_1 = \frac{S_1}{S_r}, \quad x_2 = \frac{S_2}{S_r}, \ldots,$$

on transforme les formules de Newton dans les suivantes :

$$\begin{aligned}
a_1 x_0 + x_1 &= 0,\\
2a_2 x_0 + a_1 x_1 + x_2 &= 0,\\
3a_3 x_0 + a_2 x_1 + a_1 x_2 + x_3 &= 0, \ldots.\\
(r-1) a_{r-1} x_0 + a_{r-2} x_1 + a_{r-3} x_2 + \ldots + x_{r-1} &= 0,\\
r a_r x_0 + a_{r-1} x_1 + a_{r-2} x_2 + \ldots + a_1 x_{r-1} &= -1,
\end{aligned}$$

où a_i est censé égal à zéro lorsque $i > n$. On voit donc que S_r sera égal, abstraction faite du signe, au déterminant Δ_r, dénominateur des valeurs des r inconnues x_0, $x_1, \ldots, x_{r-1}$ dans ces r équations, et comme, suivant une convention reçue, le terme a^r sera positif dans le déterminant Δ_r, on conclut de là

$$S_r = (-1)^r \Delta_r.$$

Remarque. M. Cauchy a démontré d'une manière fort simple dans les *Comptes rendus*, t. XII, p. 701, la formule de Waring qui donne les sommes S_r en fonction des coefficients a_i et celle qui, réciproquement, exprime ces coefficients en fonction des sommes S_r. Lagrange déduit l'expression de S_r d'une série dans laquelle on ne doit retenir que les puissances négatives de u, l'équation proposée étant mise sous la forme

$$x = u + f(x).$$

On peut demander ce qu'il faut substituer au théorème de Lagrange lorsqu'on suppose le paramètre $u = 0$ et l'équation réduite à

$$x = f(x);$$

on trouvera aisément qu'alors, en laissant u indéterminé dans la série, il faut retenir seulement les termes indépendants de u.

Je profite aussi de cette occasion pour renouveler une observation que j'ai déjà faite. Le théorème sur la réduction des fonctions rationnelles *non entières* d'une ou de plusieurs racines à des fonctions entières des mêmes racines a été démontré par M. Gauss dans un Mémoire de 1814 qui fait partie du tome III des *Commentationes Societatis Gottengensis recentiores* (voyez les *Mémoires de Mathématiques*, page 53, n° 11. Le Mémoire de M. Gauss est intitulé : *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*). Il est vrai qu'on n'y parle que des fonctions d'une seule racine, mais on sait que les autres cas se réduisent à celui-ci. C'est pourquoi il me semble que le théorème en question n'est pas dû à Wantzel.