

BRIOSCHI

Solution de la question 278 (Jacobi)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 14
(1855), p. 170-172

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__170_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1855, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 278 (JACOBI)

(voir t. XII, p. 260) ;

PAR M. BRIOSCHI,

Professeur à l'Université de Pavie.

En posant

$$R = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{dR}{da}, \quad \beta = \frac{dR}{db}, \quad \gamma = \frac{dR}{dc}, \dots,$$

on a, par un théorème connu,

$$R^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Si de plus on pose

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = A, \quad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = D,$$

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = B, \quad \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 = E,$$

$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = C, \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = F,$$

et

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = A_1, \quad \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = D_1,$$

$$\beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = B_1, \quad \alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 = E_1,$$

$$\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = C_1, \quad \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = F_1,$$

les équations des deux ellipsoïdes, à cause des notations ci-dessus, reçoivent la forme

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 + 2D xy + 2E xz + 2F yz = k^2,$$

$$A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 z^2 + 2D_1 xy + 2E_1 xz + 2F_1 yz = k^2.$$

Ces deux ellipsoïdes sont égaux lorsque les coefficients des mêmes puissances de θ dans les deux équations suivantes sont égaux :

$$\begin{vmatrix} A - \theta & D & E \\ D & B - \theta & F \\ E & F & C - \theta \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 - \theta & D_1 & E_1 \\ D_1 & B_1 - \theta & F_1 \\ E_1 & F_1 & C_1 - \theta \end{vmatrix} = 0,$$

ou lorsqu'on aura

$$(1) \quad A + B + C = A_1 + B_1 + C_1,$$

$$(2) \quad \begin{vmatrix} A & D \\ D & B \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & E \\ E & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & F \\ F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ D_1 & B_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & E_1 \\ E_1 & C_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 & F_1 \\ F_1 & C_1 \end{vmatrix},$$

$$(3) \quad \begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & E_1 \\ D_1 & B_1 & F_1 \\ E_1 & F_1 & C_1 \end{vmatrix}.$$

La première de ces équations est évidente. Pour vérifier la seconde, j'observe que, par un théorème connu, on a

$$\begin{vmatrix} A & D \\ D & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2,$$

et que, par un autre théorème, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = R \frac{d^2 R}{da db_1} = R c_2,$$

par conséquent,

$$\begin{vmatrix} A & D \\ D & B \end{vmatrix} = R^2 (c^2 + c_1^2 + c_2^2).$$

On trouve de même

$$\begin{vmatrix} A & E \\ E & C \end{vmatrix} = R^2(b^2 + b_1^2 + b_2^2),$$

$$\begin{vmatrix} B & F \\ F & C \end{vmatrix} = R^2(a^2 + a_1^2 + a_2^2),$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ D_1 & B_1 \end{vmatrix} = R^2(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2),$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & E_1 \\ E_1 & C_1 \end{vmatrix} = R^2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2),$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & F_1 \\ F_1 & C_1 \end{vmatrix} = R^2(a^2 + b^2 + c^2);$$

expressions qui vérifient la seconde équation. La troisième est vérifiée tout de suite en carrant l'équation (1), et, en exécutant le carré par ligne et par colonne (*), on aura ainsi

$$R^4 = \begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & E_1 \\ D_1 & B_1 & F_1 \\ E_1 & F_1 & C_1 \end{vmatrix}.$$
