BRIOSCHI

Solution de la question 278 (Jacobi)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 14 (1855), p. 170-172

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1855_1_14__170_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 278 (JACOBI)

(voir t. XII, p. 260);

PAR M. BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

En posant

$$R = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\alpha = \frac{dR}{da}, \quad \beta = \frac{dR}{db}, \quad \gamma = \frac{dR}{dc}, \ldots,$$

on a, par un théorème connu,

$$R^2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}.$$

Si de plus on pose

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = A, \qquad \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = D,$$
$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = B, \qquad \alpha\alpha_2 + \beta\beta_2 + \gamma\gamma_2 = E,$$
$$\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = C, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = F,$$

et

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = A_1, \qquad \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = D_1,$$
$$\beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = B_1, \qquad \alpha\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 = E_1,$$
$$\gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = C_1, \qquad \beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = F_1,$$

les équations des deux ellipsoïdes, à cause des notations ci-dessus, reçoivent la forme

$$\mathrm{A}\,x^2 + \mathrm{B}\,y^2 + \mathrm{C}\,z^2 + 2\mathrm{D}\,xy + 2\mathrm{E}\,xz + 2\mathrm{F}\,yz = k^2,$$

$$\mathrm{A}_1 x^2 + \mathrm{B}_1 y^2 + \mathrm{C}_1 z^2 + 2\mathrm{D}_1 xy + 2\mathrm{E}_1 xz + 2\mathrm{F}_1 yz = k^2.$$

Ces deux ellipsoïdes sont égaux lorsque les coefficients des mêmes puissances de θ dans les deux équations suivantes sont égaux :

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A}-\theta & \mathrm{D} & \mathrm{E} \\ \mathrm{D} & \mathrm{B}-\theta & \mathrm{F} \\ \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{C}-\theta \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1-\theta & \mathrm{D}_1 & \mathrm{E}_1 \\ \mathrm{D}_1 & \mathrm{B}_1-\theta & \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{E}_1 & \mathrm{F}_1 & \mathrm{C}_1-\theta \end{vmatrix} = 0,$$

ou lorsqu'on aura

$$(1) \qquad \mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_1,$$

$$(2) \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{D} \\ \mathrm{D} & \mathrm{B} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{E} \\ \mathrm{E} & \mathrm{C} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{D}_1 \\ \mathrm{D}_1 & \mathrm{B}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{E}_1 \\ \mathrm{E}_1 & \mathrm{C}_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathrm{B}_1 & \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{F}_1 & \mathrm{C}_1 \end{vmatrix},$$

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{D} & \mathrm{E} \\ \mathrm{D} & \mathrm{B} & \mathrm{F} \\ \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{D}_1 & \mathrm{E}_1 \\ \mathrm{D}_1 & \mathrm{B}_1 & \mathrm{F}_1 \\ \mathrm{E}_1 & \mathrm{F}_1 & \mathrm{C}_1 \end{vmatrix}.$$

La première de ces équations est évidente. Pour vérifier la seconde, j'observe que, par un théorème connu, on a

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{D} \\ \mathrm{D} & \mathrm{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}^2,$$

et que, par un autre théorème, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = \mathrm{R}\frac{d^2\mathrm{R}}{da\,db_1} = \mathrm{R}c_2,$$

par conséquent,

$$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{D} \\ \mathrm{D} & \mathrm{B} \end{vmatrix} = \mathrm{R}^2(c^2 + c_1^2 + c_2^2).$$

On trouve de même

$$\begin{vmatrix} A & E \\ E & C \end{vmatrix} = R^2(b^2 + b_1^2 + b_2^2),$$

$$\begin{vmatrix} B & F \\ F & C \end{vmatrix} = R^2(a^2 + a_1^2 + a_2^2),$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ D_1 & B_1 \end{vmatrix} = R^2(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2),$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & E_1 \\ E_1 & C_1 \end{vmatrix} = R^2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2),$$

$$\begin{vmatrix} B_1 & F_1 \\ F_1 & C_1 \end{vmatrix} = R^2(a^2 + b^2 + c^2);$$

expressions qui vérifient la seconde équation. La troisième est vérifiée tout de suite en carrant l'équation (1), et, en exécutant le carré par ligne et par colonne (*), on aura ainsi

$$R^4 = \begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 & D_1 & E_1 \\ D_1 & B_1 & F_1 \\ E_1 & F_1 & C_1 \end{vmatrix}.$$