NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ENCKE

Résolution générale des équations numériques ; méthode Gräffe

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 81-91

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__81_0>

RÉSOLUTION GÉNÉRALE DES EQUATIONS NUMERIQUES;

MÉTHODF GRAFFE;

D'APRÈS M. ENCKE,
Professeur, directeur de l'Observatoire, secretaire de l'Academie des Sciences de Berlin.

(Journal de M. Crelle, t. XXII, p. 193; 1851.)

L'Académie des Sciences de Berlin avait proposé pour question la résolution générale des équations numériques. Le prix fut remporté par M. Graffe, professeur à Zurich. Le Mémoire couronné a paru sous ce titre : *Die auflösung der höheren numerischen Gleichungen, als beantwortung einer von der Königl. Akad. de Wiss. zu Berlin aufgestellten Preisfrage;* Zurich, 1837 : Résolution des équations numériques supérieures; réponse à une question proposée par l'Académie royale des Sciences de Berlin.

Dans cet ouvrage, l'auteur forme une seconde équation dont les racines sont des puissances *très-élevées* des racines de l'équation *donnée,* et les coefficients de cette seconde équation servent à faire connaître simultanément toutes les racines réelles et tous les modules des racines imaginaires, et l'on montre aussi la manière la plus simple de former cette seconde équation.

Cette nouvelle méthode de résolution se recommande à un haut degré, par la généralité, la rigueur et la brièveté. Elle est directe, n'ayant besoin d'aucune autre espèce d'essai; elle ne conduit jamais à des équations plus élevées que la proposée, et, d'après un procédé toujours le même, n'exige jamais de calculs impraticables. La nature des racines, le nombre des imaginaires, ne sont pas des obstacles; elle donne toujours des résultats que la plus simple substitution permet de contrôler. Ce procédé est tellement court, qu'on peut déterminer toutes les racines d'une équation du septième degré ayant six racines imaginaires, dans l'espace de deux à trois heures, avec l'approximation que permettent des logarithmes à sept décimales.

Le Mémoire de M. Encke, auquel appartient l'appréciation précédente du travail de M. Gräffe, en fait une nouvelle exposition et le complète, en ce sens qu'il indique les moyens : 1° de calculer, non les modules, mais les racines imaginaires mêmes, par une méthode simple et rigoureuse; 2° de faciliter les procédés lorsque, les racines étant très-rapprochées, des puissances élevées ne suffisent pas pour les séparer suffisamment; 3° d'approcher des véritables valeurs, avec un degré quelconque d'approximation.

1. Problème. *Former l'équation aux carrés des racines d'une équation donnée.*

Solution. Soit l'équation

$$(1)\qquad x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0,$$
$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Faisant $x^2 = y$, les termes de degré pair ne renferment que y, et les termes de degré impair renferment encore $\sqrt{y}$; faisant disparaître le radical, on obtient

$$(2)\quad \left|\begin{array}{l|l|l|l|l} y^n - A_1^2 & y^{n-1} + A_2^2 & y^{n-2} - A_3^2 & y^{n-3} + A_4^2 & y^{n-4} + \ldots = 0. \\ \quad + 2A_2 & \quad - 2A_1A_3 & \quad + 2A_2A_4 & \quad - 2A_3A_5 & \\ & \quad + 2A_4 & \quad - 2A_1A_5 & \quad + 2A_2A_6 & \\ & & \quad + 2A_6 & \quad - 2A_1A_7 & \\ & & & \quad + 2A_8 & \end{array}\right.$$

La loi de formation est évidente.

Corollaire. En suivant la même loi, on peut former, avec l'équation (2), une troisième équation dont les racines sont les quatrièmes puissances des racines de l'équation (1), et en continuant de même, on peut parvenir à une équation ayant pour racines la puissance d'indice 2^p des racines de la proposée; p est un nombre entier positif.

Premier cas : *Toutes les racines sont réelles.*

Les équations aux puissances paires des racines, n'ayant que des racines positives, ne présentent que des *variations.*

Soit donc l'équation suivante, celle des racines élevées à la puissance $2^p = q$,

$$x^n - P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n P_n = 0;$$

donc

$$P_1 = \alpha_1^q + \alpha_2^q + \ldots + \alpha_n^q,$$

$$P_2 = \alpha_1^q \alpha_2^q + \ldots + \alpha_{n-1}^q \alpha_n^q,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)^q.$$

Supposons que les racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient rangées par ordre décroissant de grandeur *absolue;* il est évident que q allant en croissant, on pourra enfin négliger les valeurs de $\alpha_2^q, \alpha_3^q, \ldots$, relativement à α_1^q, et l'on aura

$$P_1 = \alpha_1^q;$$

d'où, pour une première approximation,

$$\alpha_1 = \sqrt[q]{P_1};$$

le signe se détermine facilement d'après les *limites* connues des racines positives et négatives.

On aura, par la même raison,

$$P_2 = \alpha_1^q \alpha_2^q,$$

d'où

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt[q]{P_2}}{\alpha_1};$$

ce qui donne une valeur approchée de α_2, et ainsi pour les autres racines.

Pour connaître la valeur de q qui permet de négliger dans chaque coefficient P_1, tous les termes en comparaison du premier, il faut calculer le même coefficient P'_1 pour une valeur $q' > q$; on devra avoir sensiblement

$$\sqrt[q]{P_1} = \sqrt[q']{P'_1}, \qquad \frac{\log P_1}{\log P_1'} = \frac{q}{q'};$$

lors donc que les logarithmes des deux coefficients des mêmes puissances dans les deux équations correspondantes à q et q', sont sensiblement dans le même rapport que ces puissances, on peut s'en tenir au premier terme dans chaque coefficient. Ce même critérium subsiste si, au lieu de procéder par *carrés* comme ci-dessus, on procédait par *cubes*.

Voyons combien il faudra d'opérations, en allant par carrés : soient $(\alpha_1 \alpha_2)^q$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^q$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^q$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5)^q$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6)^q$ (*) cinq coefficients consécutifs; dans l'équation suivante, le coefficient de la même puissance de l'inconnue que $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^q$ dans la précédente, sera

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{2q} - 2\alpha_1^{2q} \alpha_2^{2q} \alpha_3^{2q} \alpha_4^q \alpha_5^q + 2\alpha_1^{2q} \alpha_2^{2q} \alpha_3^q \alpha_4^q \alpha_5^q \alpha_6^q,$$

(*) Les parenthèses représentent des sommes en ne prenant que les termes qui fournissent les plus grands produits; pour que ce terme se réduise au premier, à la cinquième décimale près, il faut que l'on ait

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{2q} > 200000\, \alpha_1^{2q} \alpha_2^{2q} \alpha_3^{2q} \alpha_4^{q} \alpha_5^{q}.$$

d'ou

$$q > \frac{5,30103}{\log \frac{\alpha_4}{\alpha_5}}.$$

De là pour

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_5} = 1,1, \qquad \text{on trouve} \quad q = \quad 128 = 2^7,$$

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_5} = 1,01, \qquad \text{on trouve} \quad q = \quad 1227 < 2^{11},$$

$$\frac{\alpha_4}{\alpha_5} = 1,001, \qquad \text{on trouve} \quad q = 12215 < 2^{14},$$

et pour des valeurs plus grandes de $\frac{\alpha_4}{\alpha_5}$, un nombre d'autant moindre d'opérations.

Généralement, on n'aura donc besoin que de *sept* opérations; et pour des rapports de racines aussi rapprochées que 1,01, 1,001, on n'aura que *onze* à *quatorze* opérations.

En général, calculant avec cinq décimales, on trouvera la valeur de la racine après l'extraction de la racine d'indice q, avec une approximation sûre jusqu'à la cinquième et souvent jusqu'à la sixième décimale.

Lorsqu'on est parvenu à une valeur approchée à la *cent millième* partie près de la valeur totale, on peut en toute sûreté se servir du théorème de Taylor ou de la méthode d'approximation de Newton; car l'incertitude de ces méthodes existe seulement lorsqu'une valeur approche non-seulement d'une racine, mais de plusieurs racines, et de très-près.

Soit $x_{(0)}$ une valeur approchée, on a donc

$$f(x_0) = x_0^n + A_1 x_0^{n-1} + \ldots + A_0^n = 0, \quad \text{à peu près;}$$

représentons cette valeur de $f(x_0)$ par $[x_0^n]$,

$$f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) + \frac{dfx_0}{dx_0}\Delta x_0 + \ldots = 0, \quad \text{environ;}$$

$$x_0 \frac{dfx_0}{dx_0} = nx_0^n + (n-1)A_1 x_0^{n-1} + (n-2)A_2 x_0^{n-} + \ldots.$$

Représentons cette valeur par $[nx_0^n]$; on a donc approximativement

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \Delta \log x_0 = -\frac{[x_0^n]}{[nx_0^n]} \text{M},$$

M est le module du système tabulaire, et l'on a

$$\log \text{M} = 9.6376743.$$

On obtiendra ainsi, rien que par la substitution de x_0 dans l'équation, la valeur de $\Delta \log x_0$, et par conséquent celle de $\log x_0 + \Delta \log x_0$, seconde valeur approchée du logarithme de la racine.

Deuxième cas : *Toutes les racines sont imaginaires.*

Tout facteur réel du second degré, ayant deux racines imaginaires, peut être mis sous la forme

$$x^2 + 2g\cos\varphi + g^2,$$

où g est le module; l'équation qui a pour racines celles de la première équation élevées à une puissance q, aura un facteur du second degré de la forme

$$x^2 + 2g^q \cos q\varphi . x + g^{2q}.$$

Soient $\omega = f$, $2g^q \cos q\varphi = f_q$; selon les valeurs de q, f_q peut aller en augmentant ou en diminuant, excepté pour le cas spécial où $q\varphi$ est un multiple de π; alors

$f_q = 2g^q$ et le facteur devient $(x + g^q)^2$, et on rentre dans le cas des racines réelles égales : dans les autres cas, f_q varie de grandeur et de signe.

Soient

$$x^2 + fx + g^2, \quad x^2 + f'x + g'^2, \quad x^2 + f''x + g''^2, \ldots,$$

les n facteurs réels du second degré de l'équation; elle sera de la forme

$$\begin{aligned}
&x^{2n} + [f]x^{2n-1} + ([g^2] + [ff'])x^{2n-2} + ([g^2 f'] + [ff'f''])x^{2n-3} \\
&+ ([g^2 g'^2] + [g^2 f' f''] + [ff'f''f'''])x^{2n-4} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ ([g^2 g'^2 \ldots g^{(n-2)2}] + [g^2 g'^2 \ldots g^{(n-3)2} f^{(n-2)} f^{(n-1)}])x^2 \\
&+ [g^2 g'^2 \ldots g^{(n-2)2} f^{(n-1)}]x \\
&+ g^2 g'^2 \ldots g^{(n-1)2} = 0;
\end{aligned}$$

les crochets indiquent des fonctions symétriques, les puissances de degré pair renferment les f en nombre pair, et les puissances de degré impair, des f en nombre impair.

Pour passer de cette équation à celle qui a pour racines x^q, il suffit de changer les f en f_q et les g en g^q, et désignons cette nouvelle équation par (2).

Soient $g > g'$, $g' > g''$, $g'' > g'''$, etc.

Considérons dans l'équation (2) les coefficients des puissances paires : d'abord le coefficient de x^{2n-2} ; q croissant, $[g^{2q}]$ se réduira à g^{2q}; le terme $[f_q f_q']$ est plus petit que $4[g^q g'^q]$; par conséquent, le coefficient de x^{2n-2} finira par être moindre que $g^{2q} + 4g^q g'^q$. Le second terme de ce binôme disparaîtra devant le premier lorsqu'on aura

$$g^2 > g' \sqrt[q]{4},$$

inégalité qui s'établira toujours, en faisant croître q; par exemple, pour $q = 128$, on a

$$\sqrt[128]{4} = 1{,}011.$$

Ainsi, dès que g surpasse g', le coefficient de x^{2n-2} se réduit à g^{2q}; les mêmes raisonnements montrent que q allant en croissant, les coefficients des puissances successives paires tendent vers g^{2q}, $g^{2q}g'^{2q}$, $g^{2q}g'^{2q}g''^{2q}$, etc.

Ces raisonnements ne s'appliquent pas aux coefficients des puissances impaires, parce que les premiers termes contiennent en même temps g et f, de sorte que ces coefficients n'ont pas de limites déterminées; mais les coefficients des puissances paires suffisent pour faire connaître les divers g : ainsi le coefficient de x^{2n-2} donne g^{2q}, celui de x^{2n-4} donne $g^{2q}g'^{2q}$; donc

$$g'^{2q} = \frac{g^{2q}g'^{2q}}{g^{2q}},$$

et ainsi des autres.

Le facteur trinôme $x^2 + 2g\cos\varphi + q^2$ donne

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1},$$

et g est remplacé par r; on substitue cette valeur dans l'équation

$$x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_{2n} = 0;$$

on obtient deux équations

$$0 = \sum_0^{2n} A_{2n-p} r^p \cos p\varphi, \quad 0 = \sum_0^{2n} A_{2n-p} r^p \sin p\varphi;$$

la sommation se rapporte à p.

Multipliant la première équation par $\cos n\varphi$, et la seconde par $\sin n\varphi$, et les ajoutant, et ensuite multipliant la première équation par $\sin n\varphi$, et la seconde par $\cos n\varphi$, et retranchant, il vient

$$0 = \sum_0^{2n} A_p r^{2n-p} \cos(n-p)\varphi, \quad 0 = \sum_0^{2n} A_p r^{2n-p} \sin(n-p)\varphi;$$

faisons

$$A_q + A_{2n-q} r^{-(2n-2q)} = \beta_q, \quad A_q - A_{2n-q} r^{-(2n-2q)} = \gamma_q \ (*);$$

(*) Ne pas confondre cette lettre q avec celle qui a été employée ci-dessus les deux équations, après les avoir divisées par r^{2n}, deviennent

$$\sum_0^n \frac{\beta_p}{r^p} \cos(n-p)\varphi = 0, \quad \sum_0^n \frac{\gamma_p}{r^p} \sin(n-p)\varphi = 0.$$

On convertit les multiples des sinus et cosinus en puissances, d'après la méthode connue; on fait

$$t = -2r\cos\varphi,$$

et l'on parvient à ces deux équations :

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{array}{l} \mathrm{T}_n - r^2\mathrm{T}_{n-2} + r^4\mathrm{T}_{n-4} - r^6\mathrm{T}_{n-6} + r^8\mathrm{T}_{n-8} + \ldots = 0, \\ \mathrm{T}_{n-1} - r^2\mathrm{T}_{n-3} + r^4\mathrm{T}_{n-5} - r^6\mathrm{T}_{n-7} + r^8\mathrm{T}_{n-9} + \ldots = 0, \end{array}\right.$$

où

$$\mathrm{T}_{n-1} = \beta t^n - \beta_1 t^{n-1} + \beta_2 t^{n-2} - \beta_3 t^{n-3} + \ldots (-1\ \beta_n,$$

$$\mathrm{T}_{n-1} = \gamma t^{n-1} - \gamma_1 t^{n-2} + \gamma_2 t^3 - \nu_3 t^{n-3} \ldots (-1)^{n+1}\gamma_n,$$

$$\mathrm{T}_{n-2} = n\beta t^{n-2} - (n-1)\beta_1 t^{n-3} + (n-2)\beta_2 t^{n-4}\ldots,$$

$$\mathrm{T}_{n-3} = (n-2)\gamma t^{n-3} - (n-3)\gamma_1 t^{n-4} + (n-4)\gamma_2 t^{n-5}\ldots,$$

$$\mathrm{T}_{n-4} = \frac{1}{1.2}[n(n-3)\beta t^{n-4} - (n-1)(n-4)\beta t^{n-5} + (n-2)(n-5)\beta t^{n-6}\ldots],$$

$$\mathrm{T}_{n-5} = \frac{1}{1.2}[(n-3)(n-4)\gamma t^{n-5} - (n-4)(n-5)\gamma t^{n-6}\ldots],$$

$$\mathrm{T}_{n-6} = \frac{1}{1.2.3}[n(n-4)(n-5)\beta t^{n-6} - (n-1)(n-5)(n-6)\beta_1 t^{n-7}\ldots],$$

$$\mathrm{T}_{n-7} = \frac{1}{1.2.3}[(n-4)(n-5)(n-6)\gamma t^{n-7} - (n-5)(n-6)(n-7)\gamma_1 t^{n-8}\ldots],$$

$$\mathrm{T}_{n-8} = \frac{1}{1.2.3.4}[n(n-5)(n-6)(n-7)\beta t^{n-8} - (n-1)(n-6)(n-7)(n-8)\beta_1 t^{n-9}\ldots],$$

$$\mathrm{T}_{n-9} = \frac{1}{1.2.3.4}[(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)\gamma t^{n-9} - (n-6)(n-7)(n-8)(n-9)\gamma_1 t^{n-10}\ldots];$$

. . . .

La loi de formation est évidente.

Si dans les valeurs des β et des γ, et dans les équations (A), on remplace r par la valeur trouvée de g, la racine t, commune aux deux équations (A), donnera la valeur ci-dessus désignée par f; il faut donc chercher le diviseur commun aux deux équations par voie d'élimination.

Le calcul numérique de l'élimination s'opère facilement à l'aide des Tables de Leonelli dites de Gauss.

Soient les deux équations

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0,$$
$$x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_n = 0,$$

on en tire

$$(p) \quad x^{n-1}(A_1 - B_1) + x^{n-2}(A_2 - B_2) \ldots A_n - B_n = 0;$$

remplaçons tous les coefficients A_1, $A_2, \ldots,$ A_n; B_1, $B_2, \ldots,$ B_n, par leurs logarithmes, représentons-les par a_1, $a_2, \ldots,$ a_n; b_1, $b_2, \ldots,$ b_n, et écrivons

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots, a_n \quad \text{et} \quad x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} \ldots b_n;$$

la différence, en ayant égard aux signes, donne

$$(a_1 - b_1) x^{n-1} + (a_2 + b_2) x^{n-2}.$$

Mais $a_1 - b_1$ ou $b_1 - a_1$, au moyen des Tables de Gauss, fait trouver $\log(A_1 - B_1)$; de même, $\log(A_2 - B_2), \ldots$: on a donc de suite l'équation (p) de degré $n - 1$. Si l'on a une seconde équation de ce degré, on en déduira une autre de degré $n - 2$, et de la même manière; il faut seulement faire attention : 1° à donner au premier terme pour coefficient l'unité, ce qu'on obtient en retranchant du logarithme de chaque coefficient, le logarithme du coefficient de ce premier terme; 2° à donner aux logarithmes les mêmes signes qu'ont les nombres. On voit que l'élimination se réduit à une suite de *soustractions*.

Troisième cas : *Racines imaginaires et racines réelles.*

L'auteur démontre que la méthode donnée ci-dessus, pour trouver les facteurs trinômes à racines *imaginaires*, est encore applicable de même à la recherche des facteurs trinômes à racines réelles; or toute équation de degré pair est décomposable en facteurs trinômes, et si le degré est impair, on le rend pair, en multipliant l'équation par l'inconnue; donc la méthode développée subsiste pour toutes les équations.

Pour les développements et les discussions ultérieures, leur étendue nous oblige de renvoyer au Mémoire de M. Encke.

Nous donnerons incessamment des applications numériques calculées par M. Koralek.