

BALTZER

Coordonnées obliques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 13
(1854), p. 5-22

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__5_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1854, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

COORDONNÉES OBLIQUES;

D'APRÈS M. BALTZER,

Professeur au Gymnase de Dresde.

(Journal de M. Crelle, t. XLVI, p. 145; 1853.)

A. *Coordonnées obliques; points et droites dans le plan.*

1. *Notations.* x , abscisse; y , ordonnée; r , distance du point (Q) à l'origine O; xr , angle que fait la direction r avec x positif, l'angle étant compté suivant un sens déterminé; de sorte que

$$\begin{aligned} \text{angle } rx + \text{angle } xr &= 0, & \sin rx + \sin xr &= 0, \\ \cos rx - \cos xr &= 0. \end{aligned}$$

2. THÉORÈME. *Dans un polygone fermé, un côté est égal à la somme algébrique des projections des autres côtés sur ce côté.* — Théorème fondamental qu'on doit, je crois, à Carnot.

3. D'après ce théorème et cette notation, l'on a

$$\begin{aligned} (1) \quad & r = x \cos xr + y \cos yr, \\ (2) \quad & \begin{cases} r \cos xr = x + y \cos xy, \\ r \cos yr = x \cos xy + y, \end{cases} \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$(3) \quad \frac{x + y \cos xy}{\cos xr} = \frac{x \cos xy + y}{\cos yr} = r,$$

$$(4) \quad r^2 = x^2 + 2xy \cos xy + y^2,$$

$$(5) \quad \frac{\cos xr - \cos yr \cos xy}{x} = \frac{\cos yr - \cos xr \cos xy}{y} = \frac{\sin^2 xy}{r},$$

$$(6) \quad \sin^2 xy = \cos^2 xr - 2 \cos xr \cos yr \cos xy + \cos^2 yr.$$

4. *Angles d'une droite avec les axes.* Le rapport $x:y$ est constant pour tous les points de la droite OQ; ainsi

$$\frac{x}{y} = \frac{f}{g}, \quad gx - fy = 0,$$

est l'équation de la droite.

Nous désignons par (fg) la direction de la droite; si l'on a

$$\frac{r}{\rho} = \frac{x}{f} = \frac{y}{g},$$

alors, à cause de l'équation (4),

$$\rho^2 = f^2 + 2fg \cos xy + g^2,$$

et

$$\frac{f + g \cos xy}{\cos xr} = \frac{f \cos xy + g}{\cos yr} = \rho^2,$$

ce qui donne les angles xr , yr , que fait la droite avec les axes.

5. *Normale.* Soient $gx - fy = h$ l'équation d'une droite, $g'x - f'y = 0$ l'équation de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite, et n la longueur de cette perpendiculaire. On a, d'après le théorème (2), x, y étant un point situé sur la droite donnée,

$$x \cos xn + y \cos yn = n;$$

équation qui doit être identique avec l'équation de la

(7)

droite donnée, donc

$$\frac{g}{\cos xn} = \frac{-f}{\cos yn} = \frac{h}{n}, \quad \cos xn = \frac{ng}{h}, \quad \cos yn = \frac{-nf}{h};$$

l'équation (5), appliquée à la normale, donne

$$\frac{\cos xn - \cos yn \cos xy}{f'} = \frac{\cos yn - \cos xn \cos xy}{g'} = \frac{\sin^2 xy}{\rho'},$$

ou bien

$$\frac{g + f \cos xy}{f'} = -\frac{f + g \cos xy}{g'} = \frac{h \sin^2 xy}{n \rho'},$$

ou

$$\rho'^2 = f'^2 + 2f'g' \cos xy + g'^2;$$

et l'équation (6) donne

$$\frac{h^2}{n^2} \sin^2 xy = g^2 + 2fg \cos xy + f^2 = \rho^2,$$

d'où

$$\frac{h}{n} = \frac{\rho}{\sin xy};$$

et réciproquement, les deux directions (fg) et $(f'g')$ sont normales l'une à l'autre, lorsque

$$gg' + ff' + (fg' + gf') \cos xy = 0.$$

6. *Angle de deux droites.* Soient les droites $gx - fy = 0$; $g'x - f'y = 0$; x, y un point de la première droite; x', y' un point de la seconde droite; $r^2 = x^2 + 2xy \cos xy + y^2$, $r'^2 = x'^2 + 2x'y' \cos xy + y'^2$;

on a

$$r' \cos rr' = x' \cos xr + y' \cos yr \quad (\text{théorème 2}),$$

et, à l'aide de l'équation (3),

$$(7) \quad rr' \cos rr' = x'x + y'y + (x'y + y'x) \cos xy;$$

ou bien, à l'aide de l'équation (5),

$$(8) \quad \begin{cases} \sin^2 xy \cos rr' = \cos xr \cos xr' + \cos yr \cos yr' \\ -(\cos yr \cos yr' + \cos xr' \cos yr') \cos xy, \end{cases}$$

on a

$$\frac{f}{x} = \frac{g}{y} = \frac{\rho}{r}, \quad \frac{f'}{x'} = \frac{g'}{y'} = \frac{\rho'}{r'},$$

ou

$$\rho^2 = f^2 + 2fg \cos xy + g^2, \quad \rho'^2 = f'^2 + 2f'g' \cos xy + g'^2;$$

substituant, dans l'équation (7), on trouve

$$\rho\rho' \cos rr' = ff' + gg' + (fg' + gf') \cos xy.$$

On parvient au même résultat en substituant, dans l'équation (7), ayant égard aux équations (3),

$$\frac{f + g \cos xy}{\cos xr} = \frac{f \cos xy + y}{\cos yr} = \rho,$$

$$\frac{f' + g' \cos xy}{\cos x'r} = \frac{f' \cos xy + y'}{\cos y'r} = \rho';$$

faisant $rr' = \frac{\pi}{2}$, on revient à la formule des directions normales.

7. *Distance d'une droite à l'origine.* Soient l'équation de la droite $gx - fy = h$; n la distance de cette droite à l'origine; on a, comme ci-dessus (§ 5),

$$n = \frac{h \sin xy}{\rho}.$$

8. *Distance d'une droite à un point quelconque.* Soient la même droite et un point (x_1, y_1) , et n_1 la distance cherchée; on trouve facilement

$$n_1 = \frac{(h - gx_1 - fy_1) \sin xy}{\rho}.$$

B. *Points, droites, plans dans l'espace.*

9. *Notation.*

$$OP = x, \quad PQ = y, \quad QR = z,$$

coordonnées des points R; OR = r .

10. On a

$$(1) \quad r = x \cos xr + y \cos yr + z \cos zr,$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \cos xr = x + y \cos xy + z \cos zx \\ r \cos yr = x \cos xy + y + z \cos yz \\ r \cos zr = x \cos zx + y \cos yz + z \end{array} \right\} \text{ [théorème 2]};$$

de là

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x + y \cos xy + z \cos zx}{\cos xr} \\ = \frac{x \cos xy + y + z \cos yz}{\cos yr} \\ = \frac{x \cos zx + y \cos yz + z}{\cos zr} = r. \end{array} \right.$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$(4) \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos xy + 2yz \cos yz + 2zx \cos zr.$$

On déduit, des équations (2),

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sin^2 yz \cos xr - \gamma \cos yr - \beta \cos zr}{x} \\ = \frac{\sin^2 zx \cos yr - \alpha \cos zr - \gamma \cos xr}{y} \\ = \frac{\sin^2 xy \cos zr - \beta \cos xr - \alpha \cos yr}{z} = \frac{\delta^2}{r}, \end{array} \right.$$

ou

$$\alpha = \cos yz - \cos zx \cos yz,$$

$$\beta = \cos zx - \cos xy \cos yz,$$

$$\gamma = \cos xy - \cos yz \cos zx,$$

$$\delta^2 = 1 + 2 \cos xy \cos yz \cos zx - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx.$$

Substituant pour x , y , z , r , leurs valeurs proportionnelles dans l'équation (1), on obtient

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^2 = \sin^2 yz \cos^2 xr + \sin^2 zx \cos^2 yr + \sin^2 xy \cos^2 zr \\ - 2\gamma \cos xr \cos yr - 2\beta \cos zr \cos xr - 2\alpha \cos yr \cos zr. \end{array} \right.$$

Dans le trièdre formé par les axes, soit

X l'angle dièdre opposé à yz ,

Y l'angle dièdre opposé à zx ,

Z l'angle dièdre opposé à xy ,

on a (Trigonométrie sphérique)

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = \sin zx \sin xy \cos X, \\ \beta = \sin xy \sin yz \cos Y, \\ \gamma = \sin yz \sin zx \cos Z; \end{cases}$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^2 = \sin^2 zx \sin^2 xy \sin^2 X, \\ \quad = \sin^2 xy \sin^2 yz \sin^2 Y, \\ \quad = \sin^2 yz \sin^2 zx \sin^2 Z, \\ \\ = 4 \sin \frac{1}{2} (xy + yz + zx) \sin \frac{1}{2} (xy + yz - zx) \\ \quad \sin \frac{1}{2} (yz + zx - xy) \sin \frac{1}{2} (zx + xy - yz); \end{array} \right.$$

de là

$$\frac{\cot X}{\alpha} = \frac{\cot Y}{\beta} = \frac{\cot Z}{\gamma} = \frac{1}{\delta}.$$

11. *Volume du parallépipède des axes.* Si l'on prend, à partir de l'origine, une longueur égale à l'unité sur les trois axes, et qu'on achève le parallépipède, le volume est égal à δ ; élevant à l'origine les droites x' , y' , z' respectivement perpendiculaires aux plans yz , zx , xy , on aura

$$(9) \quad \delta = \sin xy \cos zz' = \sin yz \cos xx' = \sin zx \cos yy'.$$

12. Par le point R, menons un plan perpendiculaire à OR; soient K, L, M les points d'intersection de ce plan, avec les axes x , y , z : on a

$$KLM \cos xr = OIM \cos x'x, \text{ etc. ;}$$

d'où

$$(10) \quad OLM \cdot \frac{\cos x'x}{\cos xr} = OMK \cdot \frac{\cos y'y}{\cos yr} = OKL \cdot \frac{\cos z'z}{\cos zr} = KLM,$$

et de là, au moyen de l'équation (9),

$$(11) \quad \frac{OLM}{\sin yz \cos xr} = \frac{OMK}{\sin zx \cos yr} = \frac{OKL}{\sin xy \cos zr} = \frac{KLM}{\delta}.$$

Cette équation, combinée avec les équations (6) et (7), donne

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} KLM^2 = OLM^2 + OMK^2 + OKL^2 \\ - 2 \cdot OLM \cdot OMK \cdot \cos Z - 2 \cdot OMK \cdot OKL \cdot \cos X \\ - 2 \cdot OKL \cdot OLM \cdot \cos Y; \end{array} \right.$$

on a

$$x \cos x'x = r \cos x'r, \text{ etc. ;}$$

d'où

$$(13) \quad \frac{x \cos x'x}{\cos x'r} = \frac{y \cos y'y}{\cos y'r} = \frac{z \cos z'z}{\cos z'r} = r.$$

Les accents désignent, comme ci-dessus, des perpendiculaires aux plans coordonnés.

13. Équation d'une droite

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h};$$

f, g, h donnent la direction de la droite, et nous désignons une telle droite donnée de direction par (fgh) .

14. Angles d'une droite avec les axes.

Si l'on a

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h} = \rho,$$

on aura, d'après l'équation (4),

$$\rho^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos xy + 2gh \cos yz + 2hf \cos zx;$$

et, d'après les équations (3),

$$\begin{aligned} \frac{f + g \cos xy + h \cos zx}{\cos xr} &= \frac{g + h \cos yz + f \cos xy}{\cos yr} \\ &= \frac{h + f \cos zx + g \cos yz}{\cos zr} = \rho. \end{aligned}$$

15. *Équation d'un plan.* Soit un plan perpendiculaire en R sur OR et $OR = r$; soit R' un point quelconque du plan ayant les coordonnées x', y', z' : projetant orthogonalement sur OR la ligne brisée $OP'Q'R'$ formée par les coordonnées de R', on a

$$x' \cos xr + y' \cos yr + z' \cos zr = r$$

pour équation du plan.

Ainsi, si l'on a pour équation d'un plan

$$Ax + By + Cz = D,$$

alors

$$\frac{A}{\cos xr} = \frac{B}{\cos yr} = \frac{C}{\cos zr} = \frac{D}{r},$$

où r est la distance de l'origine au plan, xr l'angle de l'axe des x avec cette distance, etc. Nous désignons par (ABC) un tel plan donné de direction.

Si (fgh) est la direction de cette normale r , on a, d'après les équations (5),

$$\begin{aligned} \frac{A \sin^2 yz - \gamma B - \beta C}{f} &= \frac{B \sin^2 zx - \alpha C - \gamma A}{g} \\ &= \frac{C \sin^2 xy - \beta A - \alpha B}{h} = \frac{\delta^2 D}{r^2}; \end{aligned}$$

et, d'après l'équation (6),

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 D^2}{r^2} &= A^2 \sin^2 yz + B^2 \sin^2 zx + C^2 \sin^2 xy \\ &\quad - 2AB\gamma - 2BC\alpha - 2CA\beta = \sigma^2, \\ \frac{D}{r} &= \frac{\sigma}{\delta}. \end{aligned}$$

16. *Condition pour qu'une direction (fgh) soit contenue dans un plan (ABC).*

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h}, \quad \text{équation de la droite,}$$

$$Ax + By + Cz = 0, \quad \text{équation du plan;}$$

on a, pour équation de condition,

$$A f + B g + C h = 0.$$

17. Condition pour que deux directions (fgh) , $(f'g'h')$ soient dans un plan (ABC) .

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h}, \quad \text{équation de la première direction;}$$

$$\frac{x}{f'} = \frac{y}{g'} = \frac{z}{h'}, \quad \text{équation de la deuxième direction;}$$

$$A x + B y + C z = 0, \quad \text{équation du plan;}$$

on a

$$\frac{gh' - g'h}{A} = \frac{hf' - h'f}{B} = \frac{fg' - f'g}{C}.$$

18. Condition pour qu'une direction (fgh) soit dans deux plans (ABC) , $(A'B'C')$.

$$\left. \begin{aligned} A x + B y + C z = 0 \\ A' x + B' y + C' z = 0 \end{aligned} \right\} \text{équations des deux plans;}$$

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h}, \quad \text{direction;}$$

$$\frac{BC' - B'C}{f} = \frac{CA' - C'A}{g} = \frac{AB' - A'B}{h}.$$

19. Condition pour qu'une direction (fgh) soit normale à un plan (ABC) . La direction (fgh) est perpendiculaire au plan (ABC) , lorsque (§ 15)

$$\begin{aligned} \frac{A \sin^2 yz - \gamma B - \beta C}{f} &= \frac{B \sin^2 zx - \alpha C - \gamma A}{g} \\ &= \frac{C \sin^2 xy - \beta A - \alpha B}{h} = \frac{\partial \sigma}{\rho}; \end{aligned}$$

ou bien encore, ayant égard aux §§ 14 et 15,

$$\begin{aligned} \frac{f + g \cos xy + h \cos zx}{A} &= \frac{g + h \cos yz + f \cos xy}{B} \\ &= \frac{h + f \cos zx + g \cos yz}{C} = \frac{\partial}{\sigma}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$A f + B g + C h = \rho \frac{\sigma}{\delta};$$

les valeurs de ρ , σ , δ sont données ci-dessus (p. 9, 11, 12).

20. *Condition pour qu'une direction (fgh) soit normale à la direction ($f'g'h'$).*

Il faut que la direction ($f'g'h'$) soit dans le plan normal à la direction (fgh); donc, ayant égard aux §§ 16 et 19,

$$f'f + g'g + h'h + (f'g + fg') \cos xy \\ + (g'h + gh') \cos yz + (h'f + hf') \cos zx = 0.$$

21. *Condition pour qu'un plan (ABC) soit perpendiculaire au plan (A'B'C').* Le plan (A'B'C') est perpendiculaire au plan (ABC) lorsqu'il contient la normale à ABC; donc, ayant égard aux §§ 16 et 19,

$$AA' \sin^2 yz + BB' \sin^2 zx + CC' \sin^2 xy - \gamma (A'B + AB') \\ - \alpha (B'C + BC') - \beta (C'A + CA') = 0.$$

22. *Angle de deux droites.*

Soient la droite (fgh) et la droite ($f'g'h'$); il s'agit de trouver l'angle ROR'; on a

$$(14) \quad \begin{cases} r' \cos rr' = x' \cos xr + y' \cos yr + z' \cos zr, \\ r \cos r'r = x \cos xr' + y \cos yr' + z \cos zr'. \end{cases}$$

x' , y' , z' sont relatifs au point R'; d'où, ayant égard à l'équation (13),

$$(15) \quad \begin{cases} \cos rr' = \frac{\cos xr \cos x'r'}{\cos xx'} + \frac{\cos yr \cos y'r'}{\cos yy'} + \frac{\cos zr \cos z'r'}{\cos zz'}, \\ = \frac{\cos xr' \cos x'r}{\cos xx'} + \frac{\cos yr' \cos y'r}{\cos yy'} + \frac{\cos zr' \cos z'r}{\cos zz'}; \end{cases}$$

ici x' , y' , z' sont des axes normaux aux plans yz , zx , xy (§ 11) : éliminant, de l'une des équations (14), les cosinus au moyen des équations (3), on a

$$(16) \quad \begin{cases} rr' \cos rr' = xx' + yy' + zz' + (xy' + x'y) \cos xy \\ + (yz' + y'z) \cos yz + (zx' + z'x) \cos zx; \end{cases}$$

ou bien, éliminant des équations (14), les x, y, z, r à l'aide des équations (5),

$$(17) \left\{ \begin{array}{l} \delta^2 \cos rr' = + \sin^2 yz \cos xr \cos xr' + \sin^2 zx \cos yr \cos yr' \\ \quad + \sin^2 xy \cos zr \cos zr' \\ \quad - \gamma (\cos xr \cos yr' + \cos xr' \cos yr) \\ \quad - \alpha (\cos yr \cos zr' + \cos yr' \cos zr) \\ \quad - \beta (\cos zr \cos xr' + \cos zr' \cos xr); \quad (*) \end{array} \right.$$

or,

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h} = \frac{r}{\rho},$$

$$\frac{x'}{f'} = \frac{y'}{g'} = \frac{z'}{h'} = \frac{r'}{\rho'};$$

donc, d'après l'équation (16),

$$\rho\rho' \cos rr' = ff' + gg' + hh' + (fg' + gf') \cos xy \\ + (gh' + hg') \cos yz + (hf' + fh') \cos zx.$$

Si $\cos rr' = 0$, on revient au résultat du § 20.

23. *Angle de deux plans* (ABC) et (A'B'C').

Soient r et r' les perpendiculaires respectives à ces plans; on a

$$\frac{A}{\cos xr} = \frac{B}{\cos yr} = \frac{C}{\cos zr} = \frac{\sigma}{\delta},$$

$$\frac{A'}{\cos xr'} = \frac{B'}{\cos yr'} = \frac{C'}{\cos zr'} = \frac{\sigma'}{\delta};$$

de là et de l'équation (17), on tire

$$\sigma\sigma' \cos rr' = AA' \sin^2 yz + BB' \sin^2 zx + CC' \sin^2 xy \\ - \gamma (AB' + A'B) - \alpha (BC' + B'C) - \beta (CA' + C'A).$$

24. *Angle d'une droite* ($f'g'h'$) avec le plan (ABC).

(*) Les formules (15), (16), (17) et la méthode pour les trouver, sont de M. Sturm. (GERGONNE, *Ann.*, t. XV, p. 330.)

(16)

Soit (fgh) la direction normale à ABC (§ 15),

$$\frac{A}{\cos xr} = \frac{B}{\cos yr} = \frac{C}{\cos zr} = \frac{\sigma}{\delta},$$
$$\frac{x'}{f'} = \frac{y'}{g'} = \frac{z'}{h'} = \frac{r'}{\rho'};$$

par conséquent, d'après l'équation (14),

$$\frac{\sigma\rho'}{\delta} \cos rr' = A f' + B g' + C h'.$$

25. *Distance d'un point à un plan.*

r , distance; $Ax + By + Cz = D$, équation du plan;
 x_1, y_1, z_1 , coordonnées du point;

$$r = \frac{(D - Ax_1 - By_1 - Cz_1) \delta}{\sigma}.$$

26. Si l'on a

$$\begin{aligned} gx - fy &= H, \\ hy - gz &= F, \\ fz - hx &= G, \end{aligned}$$

où F, G, H sont des constantes qui déterminent la position, tandis que f, g, h donnent la direction d'une droite; si l'on a

$$Ff + Gg + Hh = 0,$$

cette droite est évidemment dans le plan

$$Fx + Gy + Hz = 0.$$

27. *Condition pour qu'une droite soit contenue dans un plan.*

Soit la droite donnée par les équations du § 26 et

$$Ax + By + Cz = D, \quad \text{l'équation du plan,}$$

le plan

$$v(gx - fy - H) = hy - gz - F,$$

où ν est un paramètre arbitraire, contient la droite; identifiant, on a

$$\frac{\nu}{A} = -\frac{\nu f + h}{gB} = \frac{1}{C} = \frac{\nu H - F}{Dg},$$

d'où

$$D = \frac{AH - CF}{g} = \frac{BF - AG}{h} = \frac{CG - BH}{f},$$

$$Ff + Gg + Hh = 0, \quad Af + Bg + Ch = 0.$$

28. *Condition pour qu'un point et une droite soient dans un plan.*

Équations de la droite et du plan comme au § 27, x_1, y_1, z_1 coordonnées du point; on a

$$\begin{aligned} \frac{hy_1 - gz_1 - F}{A} &= \frac{fz_1 - hx_1 - G}{B} = \frac{gx_1 - fy_1 - H}{C} \\ &= \frac{-(Fx_1 + Gy_1 + Hz_1)}{D}. \end{aligned}$$

29. *Condition pour qu'un plan contienne deux droites parallèles.*

On aura

$$\nu(gx - fy - H') = hy - gz - F';$$

les accents se rapportent à la seconde droite parallèle à la première, d'où

$$\begin{aligned} \nu(H' - H) &= F' - F, \\ \frac{F' - F}{A} &= \frac{G' - G}{B} = \frac{H' - H}{C} = \frac{HF' - H'F}{gD}, \end{aligned}$$

et, au moyen des relations ci-dessus.

$$\frac{HF - H'F}{g} = \frac{FG' - F'G}{h} = \frac{GH' - G'H}{f}.$$

30. *Condition pour qu'un plan contienne une droite et soit parallèle à une autre droite.*

La droite (efg) est contenue dans (ABC) , donc

$$Af + Bg + Ch = 0;$$

la droite $(f'g'h')$ est dans le plan $(A'B'C')$, donc

$$A'f' + B'f' + C'g' = 0;$$

mais ces deux plans doivent être parallèles, d'où

$$\frac{A'}{C'} = \frac{A}{C}, \quad \frac{B'}{C'} = \frac{B}{C}, \quad \frac{A}{C} = \frac{gh' - g'h}{fg' - f'g}, \quad \frac{B}{C} = \frac{hf' - h'f}{fg' - f'g},$$

$$\frac{D}{C} = \frac{H \cdot \frac{A}{C} - F}{g} = \frac{Ff' + Gg' + Hh'}{fg' - f'g};$$

car

$$Ff + Hh = -Gg,$$

$$\frac{D'}{C'} = \frac{F'f + G'g + H'h}{f'g - g'f}.$$

31. *Condition pour que deux droites soient dans un même plan.*

Il faut que les plans (ABC) , $(A'B'C')$ se confondent; donc

$$\frac{D}{C} = \frac{D'}{C'},$$

ou bien

$$Ff' + F'f + Gg' + G'g + Hh' + H'h = 0.$$

32. *Distance d'une droite à un plan parallèle à cette droite.*

Soient (fgh) la droite, (ABC) le plan, et $(A'B'C')$ le plan passant par (fgh) et parallèle à (ABC) ; la distance de (ABC) à $(A'B'C')$ est la distance cherchée; or cette distance est

$$(D - D') \frac{\delta}{\sigma}, \quad \text{et} \quad D' = \frac{AH - CF}{g} \quad (\S\S 27 \text{ et } 29),$$

donc la distance cherchée (§ 25),

$$s = \frac{(gD - AH + CF)\delta}{g\sigma}.$$

33. *Plus courte distance de deux droites non dans un même plan.*

Soient (fgh) , $(f'g'h')$ les deux droites, (ABC) , $(A'B'C')$ deux plans parallèles, le premier passant par (efg) , et le second par $(e'f'g')$; la distance de ces deux plans est la distance cherchée : donc

$$s = (D - D') \frac{\delta}{\sigma}, \quad \frac{D}{C} = \frac{Ff' + Gg' + Hh'}{fg' - gf'},$$

$$\frac{D'}{C'} = - \frac{F'f + G'g + H'h}{fg' - gf'};$$

donc

$$s = (Ff' + F'f + Gg' + G'g + Hh' + H'h) \frac{\delta}{\sigma}.$$

34. *Distance d'un point à une droite.*

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point, (fgh) la droite, $(A'B'C')$ un plan passant par le point et la droite; on a donc

$$\frac{hx_1 - gz_1 - F}{A'} = \frac{fz_1 - hx_1 - G}{B'} = \frac{gx_1 - fy_1 - H}{C'}.$$

Soit $(f'g'h')$ une perpendiculaire au plan $(A'B'C')$; on a (§ 19)

$$\frac{A' \sin^2 \gamma z - \gamma B' - \beta C'}{f'} = \frac{B' \sin^2 \alpha x - \alpha C' - \gamma A'}{g'}$$

$$= \frac{C' \sin^2 \alpha y - \beta A' - \alpha B'}{h'}.$$

Soit (ABC) un plan passant par (fgh) parallèlement à $(f'g'h')$, on a

$$\frac{gh' - g'h}{A} = \frac{hf' - h'f}{B} = \frac{fg' - f'g}{C} = \frac{Ff' + Gg' + Hh'}{D},$$

$$s = (D - Ax_1 - By_1 - Cz_1) \frac{\delta}{\sigma} \quad (\S 25);$$

on met pour A, B, C, D leurs valeurs proportionnelles.

35. *Distance des deux parallèles (fgh) , $(f'g'h')$.*

Soit $(A''B''C'')$ le plan passant par les deux droites, on a

$$\frac{F' - F}{A''} = \frac{G' - G}{B''} = \frac{H' - H}{C''} \quad (\S 29).$$

Soit $(f''g''h'')$ une perpendiculaire au plan $(A''B''C'')$, on a

$$\begin{aligned} \frac{A'' \sin^2 yz - \gamma B'' - \beta C''}{f''} &= \frac{B'' \sin^2 zx - \alpha C'' - \gamma A''}{g''} \\ &= \frac{C'' \sin^2 xy - \beta A'' - \alpha B''}{h''}. \end{aligned}$$

Pour (ABC) passant par (fgh) , et pour $(A'B'C')$ passant par $(f'g'h')$, tous deux parallèlement à la normale $(f''g''h'')$, on a

$$\begin{aligned} \frac{g''h'' - g''h}{A} &= \frac{hf'' - h''f}{B} = \frac{fg'' - f''g}{C} = \frac{Ff'' + Gg'' + Hh''}{D} \\ &= \frac{F'f'' + G'g'' + H'h''}{D'}; \end{aligned}$$

donc

$$s = [(F - F')f'' + (G - G')g'' + (H - H')h''] \frac{\delta}{\sigma}.$$

36. Une droite $(f''g''h'')$ passant par un point (x_1, y_1, z_1) perpendiculairement à la droite (fgh) .

Soient $(A'B'C')$ le plan passant par le point, et la droite (fgh) ; on a

$$\frac{hx_1 - gz_1 - F}{A'} = \frac{fz_1 - hx_1 - G}{B'} = \frac{gx_1 - fy_1 - H}{C'};$$

le plan (ABC) , perpendiculaire à (fgh) , donne

$$\begin{aligned} \frac{f + g \cos xy + h \cos zx}{A} &= \frac{g + h \cos yz + f \cos xy}{B} \\ &= \frac{h + f \cos zx + g \cos yz}{C}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{BC' - B'C}{f''} = \frac{CA' - C'A}{g''} = \frac{AB' - A'B}{h''}.$$

37. Une droite $(f''g''h'')$ coupant normalement les droites parallèles (fgh) , $(f'g'h')$.

Le plan $(A'B'C')$ des deux droites parallèles donne

$$\frac{F' - F}{A'} = \frac{G' - G}{B'} = \frac{H' - H}{C'} = \frac{HF' - H'F}{gD'};$$

le plan (ABC) , perpendiculaire à (fgh) , donne

$$\begin{aligned} \frac{f + g \cos xy + h \cos zx}{A} &= \frac{g + h \cos yz + f \cos xy}{B} \\ &= \frac{h + f \cos zx + g \cos yz}{C}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{BC' - B'C}{f''} = \frac{CA' - C'A}{g''} = \frac{AB' - A'B}{h''};$$

la droite $(f''g''h'')$ est dans $(A'B'C')$ si l'on a

$$D' = \frac{A'H'' - C'F''}{g},$$

ou si

$$H''(F' - F) - F''(H' - H) = \frac{g''}{g}(HF' - H'F).$$

38. Droite $(f''g''h'')$ normale aux deux droites (fgh) , $(f'g'h')$.

Le plan (ABC) contenant les deux directions (fgh) et $(f'g'h')$, on a

$$\frac{gh' - g'h}{A} = \frac{hf' - h'f}{B} = \frac{fg' - f'g}{C};$$

$(f''g''h'')$, normale à (ABC) , donne

$$\begin{aligned} \frac{A \sin^2 yz - \gamma B - \beta C}{f''} &= \frac{B \sin^2 zx - \alpha C - \gamma A}{g''} \\ &= \frac{C \sin^2 xy - \beta A - \alpha B}{h''}. \end{aligned}$$

Les droites (fgh) et $(f''g''h'')$ doivent être dans un même-

plan ; de même $(f' g' h')$ et $(f'' g'' h'')$ donnent

$$F'' f + F f'' + G'' g + G g'' + H h'' + h H'' = 0,$$

$$F'' f' + F' f'' + G'' g' + G' g'' + H'' h' + H' h'' = 0;$$

et l'on a aussi

$$F'' f'' + G'' g'' + H'' h'' = 0;$$

ainsi F'' , G'' , H'' sont connus, ainsi que f'' , g'' , h'' .

Observation. Aucun Traité, à ce que je sache, ne donne ces formules élémentaires d'une application si fréquente. M. le D^r J.-G.-H. Swellenbach, de Bonn, vient de publier un ouvrage in-4^o de 221 pages, sur *neuf* systèmes de coordonnées dont il étudie et compare les propriétés. Nous y reviendrons.