Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 437-448

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__437_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

DIE EBENE POLYGONOMETRIE, VOLLSTÄNDIG DARGESTELT UND DURCH ZAHLREICHE BEISPIELE ERLAÜTERT. La Polygonométrie plane, complétement exposée et éclaircie par de nombreux exemples; par le Dr *J. Dienger*, professeur à l'école polytechnique de Carlsruhe. Stuttgard, 1854; in-8 de 80 pages, 52 figures sur bois dans le texte.

Simon-Antoine-Jean Lhuilier (*) a publié l'ouvrage suivant : *Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes, et abrégé d'Isopérimétrie élémentaire*. Genève, 1774; in-4.

On y découvre les qualités de l'auteur, des développements instructifs, des raisonnements rigoureux; mais aussi ses défauts, des longueurs rebutantes et l'absence d'élégance et de symétrie : ces défauts expliquent pourquoi tant d'excellents ouvrages trouvent si peu de lecteurs. La *Dynamique* de d'Alembert est un chef-d'œuvre de génie; Jacobi faisait le plus grand cas de la *Théorie des Équations* de Bezout; qui lit ces deux ouvrages? On peut promettre à M. Dienger beaucoup de lecteurs, même en France, quand il sera traduit. Exposition claire, notations bien choisies, formules mnémoniques en petit nombre, applications numériques nombreuses : telles sont les qualités qui distinguent cet opuscule. Il est divisé en six sections.

(*) Né à Genève le 24 avril 1756, mort à Genève le 28 mars 1846, agé de quatre-vingt-dix ans. M. Sturm est son élève, ainsi que le prince Czartoriski, chef de l'émigration polonaise.

Première section (1-14). Détermination d'un point dans un plan; coordonnées; les axes formant quatre angles : $+x$, $+y$, premier angle; $+y$, $-x$, second angle; $-x$, $-y$, troisième angle; $-y$, $+x$, quatrième angle; conservant les directions des axes et changeant l'origine, on fait voir, qu'ayant égard aux signes, les mêmes formules servent à exprimer ce changement, qui est un mouvement de translation. Les coordonnées polaires supposent un mouvement de rotation; pour fixer le sens et la grandeur de cette rotation, on admet deux conventions, mais qui sont essentielles et qu'il ne faut jamis perdre de vue : 1° la rotation unique est celle qui amène l'axe $+x$ sur l'axe $+y$; 2° l'angle de rotation se compte de 0 à 360 degrés. Ceci établi, les équations $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, où ρ est essentiellement positif, servent à passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires, pour toutes les positions possibles.

MN étant la direction d'une droite, pour avoir son inclinaison sur l'axe des $+x$, on mène par M une parallèle MR à l'axe $+x$; la rotation que doit faire MR, pour s'appliquer sur MN, est l'inclinaison cherchée; bien entendu, rotation conforme à la convention de ci-dessus, ce qu'on ne répétera plus. r étant la longueur de MN; x_1, y_1 les coordonnés de M; x_2. y_2 les coordonnées de N; on a constamment

$$x_2 - x_1 = r\cos\varphi, \quad y_2 - y_1 = r\sin\varphi;$$

φ est l'inclinaison de r sur $+x$.

Seconde section (14-21). Détermination des coordonnées des sommets d'une ligne brisée lorsqu'on connaît les longueurs des côtés, les sommets et les angles. Pour fixer les idées, soient les neuf points 1, 2, 3,..., 8, 9; en les joignant par des droites, on obtient la ligne brisée 1 2 3...8 9, formée par les côtés 1 2, 2 3, 3 4,..., 8 9;

1 2 est le premier côté qui précède le deuxième 2 3, lequel précède le troisième côté 3 4, et ainsi de suite.

Désignons par

$$\begin{array}{lcc} a_1 \text{ la longueur du côté} & & 1\,2, \\ a_2 & — & 2\,3, \\ a_3 & — & 3\,4, \\ \vdots & & \vdots \\ a_8 & — & 8\,9; \end{array}$$

par

$$\begin{array}{lccc} v_1 \text{ l'inclinaison de} & a_1 & \text{sur l'axe} & +x, \\ v_2 & — & a_2 & — \\ v_3 & — & a_3 & — \\ \vdots & & \vdots & \\ v_8 & — & a_8 & — \end{array}$$

L'angle que forme un côté avec celui qui le suit immédiatement est mesuré par la rotation que doit faire le premier pour s'appliquer sur le second (*).

Désignons par

$$\begin{array}{lcccc} A_2 \text{ l'angle que fait le côté} & a_1 & \text{avec} & a_2, \\ A_3 & — & a_2 & — & a_3, \\ A_4 & — & a_3 & — & a_4, \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_8 & — & a_7 & — & a_8; \end{array}$$

on aura généralement pour n points :

$$w_n = w_{n-1} + A_n - 180^\circ + m_n\, 360^\circ,$$

où m_n est 0, ou $+1$, ou -1,

$$\sin w_n = \sin[v_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n (n-1)\, 180^\circ],$$
$$\cos w_n = \cos[v_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n (n-1)\, 180^\circ].$$

(*) A cet effet on fait passer par le sommet commun une parallèle à $+x$ et une parallèle à $+y$, et l'on opère une rotation qui tend à amener $+x$ sur $+y$.

Soient

$$\begin{array}{lcr} x_1,\ y_1 \text{ les coordonnées de} & & 1, \\ x_2,\ y_2 & — & 2, \\ x_3,\ y_3 & — & 3, \\ \vdots & & \vdots \\ x_n,\ y_n & — & n; \end{array}$$

on a

$$x_n = x_1 + a_1 \cos v_1 + a_2 \cos v_2 + \ldots + a_{n-1} \cos v_{n-1},$$
$$y_n = y_1 + a_1 \sin v_1 + a_2 \sin v_2 + \ldots + a_{n-1} \sin v_{n-1},$$

ou

$$\begin{aligned} x_n = x_1 &+ a_1 \cos v_1 - a_2 \cos(v_1 + A_2) + a_3 \cos(v_1 + A_2 + A_3) \\ &- a_4 \cos(v_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \ldots \\ &\pm a_{n-1} \cos(v_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1}), \\ y_n = y_1 &+ a_1 \sin v_1 - a_2 \sin(v_1 + A_2) + a_3 \sin(v_1 + A_2 + A_3) \\ &- a_4 \sin(v_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \ldots \\ &\pm a_{n-1} \sin(v_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1}); \end{aligned}$$

formules qui donnent les coordonnées en fonction des côtés et des angles de la ligne brisée.

Application numérique.

$$x_1 = 0, y_1 = 0;\ v_1 = 20^\circ\, 36';\ a_1 = 173{,}72;\ a_2 = 449{,}3473;$$
$$a_3 = 315{,}6626;\ a_4 = 207{,}9673;$$
$$a_5 = 242{,}968;\ a_6 = 175{,}1367;$$
$$A_2 = 214^\circ\, 17'\, 54'';\ A_3 = 101^\circ\, 35'\, 8'';\ A_4 = 179^\circ\, 42'\, 34'';$$
$$A_5 = 93^\circ\, 17'\, 45'';\ A_6 = 107^\circ\, 18'\, 10'';$$

on obtient

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0, & y_1 = 0, \\ x_2 = 162{,}6122, & y_2 = 61{,}1219, \\ x_3 = 420{,}9999, & y_3 = 428{,}7477, \\ x_4 = 710{,}4460, & y_4 = 302{,}7962, \\ x_5 = 300{,}7179, & y_5 = 218{,}8499, \\ x_6 = 815{,}5857, & y_6 = -\,8{,}7153, \\ x_7 = 640{,}7235, & y_7 = +\,1{,}0856. \end{array}$$

Troisième section (21-45). Équations polygonométriques fondamentales; solutions des problèmes polygonométriques.

Lorsque la ligne brisée se ferme, elle devient un polygone. Ainsi, ayant les n points $1, 2, 3, \ldots, n_1$, les côtés du polygone sont $n\,1, 12, 23, \ldots, n-1, n$; prenons le côté $1\,n$ pour axe des $+x$; et désignons par A_1 l'inclinaison de 12 sur $1\,n$; nous aurons

$$x_1 = y_1 = 0; \quad x_n = a_n; \quad y_n = 0; \quad v_1 = A_1;$$

les deux dernières formules de la section précédente donnent

$$\begin{aligned}
0 = a_1 \cos A_1 &+ (-1)^1 a_2 \cos(A_1 + A_2) \\
&+ (-1)^2 a_3 \cos(A_1 + A_2 + A_3) + \ldots \\
&+ (-1)^{n-2} a_{n-1} \cos(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) \\
&+ (-1)^{n-1} a_n \cos(A_1 + A_2 + \ldots + A_n);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = a_1 \sin A_1 &+ (-1)^1 a_2 \sin(A_1 + A_2) + \ldots \\
&+ (-1)^2 a_3 \sin(A_1 + A_2 + A_3) + \ldots \\
&+ (-1)^{n-2} a_{n-1} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\
&+ (-1)^{n-1} a_n \sin(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n);
\end{aligned}$$

ce sont les deux équations polygonométriques fondamentales. On en déduit

$$\cos(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = (-1)^n; \quad \sin(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 0,$$
$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = (n-2)\,180^\circ + r.360,$$

où r est un nombre entier positif ou négatif. Lorsque le polygone est convexe, $r = 0$ (voir *Nouvelles Annales*, tome IX, page 183, Barbet), et, dans ce cas, on peut toujours choisir l'axe des $+y$ de manière que les A deviennent les angles intérieurs du polygone.

Problème I. *Dans un polygone, on connaît tous les éléments hormis un angle et deux côtés qu'il faut calculer.*

Solution. Soit un hexagone convexe

$$A_1 = 83^\circ 44'; \ A_2 = 23^\circ 52'; \ A_3 = 290^\circ 46';$$
$$A_4 = 30^\circ 24'; \ A_5 = 244^\circ 30',$$
$$a_1 = 1040; \ a_2 = 624; \ a_4 = 533; \ a_5 = 481;$$

il s'agit de calculer A_6 et a_3, a_6. Appliquant les formules, on obtient

$$A_6 = 46^\circ 44; \ a_3 = 515{,}4753; \ a_6 = 954{,}3163.$$

Problème II. *On donne tous les côtés moins un; et tous les angles, hormis deux angles adjacents au côté cherché.*

Solution. Soit un pentagone convexe

$$a_1 = 540; \ a_2 = 519; \ a_3 = 438; \ a_4 = 536;$$
$$A_2 = 46^\circ 38'; \ A_3 = 223^\circ 55'; \ A_4 = 38^\circ 51'.$$

On obtient d'abord

$$A_1 = 110^\circ 48' 13'';$$

puis

$$A_5 = 119^\circ 47' 47'';$$

et enfin,

$$a_5 = 429{,}0677.$$

Problème III. *On connaît tous les côtés et tous les angles moins deux.*

Solution. Quadrilatère convexe :

$$a_1 = 452; \ a_2 = 610; \ a_3 = 411; \ a_4 = 483{,}212;$$
$$A_1 = 79^\circ 47' 26''; \ A_3 = 68^\circ 53'.$$

On obtient

$$A_2 = 92^\circ 5',$$

et ensuite,

$$A_4 = 119^\circ 14' 34''.$$

Problème IV. *On connaît les côtés moins un et les angles moins deux adjacents à un côté donné.*

Solution. Pentagone convexe

$$a_1 = 540;\ a_2 = 519;\ a_4 = 536;\ a_5 = 429{,}068;$$
$$A_1 = 46^\circ\,38';\ A_3 = 223^\circ\,55';\ A_4 = 38^\circ\,51'.$$

D'abord on obtient

$$a_3 = 437{,}9997;$$

puis

$$A_1 = 110^\circ\,48'\,13'';\ A_5 = 119^\circ\,47'\,47''.$$

Problème V. *On donne tous les côtés moins un et tous les angles moins deux; un seulement des angles inconnus est adjacent au côté cherché.*

Problème VI. *On connaît tous les côtés moins un; tous les angles moins deux; les angles cherchés ne se succèdent pas immédiatement et aucun d'eux n'est adjacent au côté cherché.*

Problème VII. *On donne tous les côtés, et tous les angles moins trois angles qui se succèdent immédiatement.*

Problème VIII. *Mêmes données; deux seulement des trois angles cherchés se succèdent immédiatement.*

Problème IX. *Mêmes données; les angles cherchés sont entièrement séparés.*

Quatrième section (46-59). Calcul de l'aire d'un polygone dont on connaît les côtés et les angles.

Le double de l'aire d'un polygone quelconque de n sommets est

$$y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_4 \ldots . y_{n-1} x_n + y_n x_1$$
$$- (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_2 y_4 + \ldots + x_{n-1} y_n + x_n y_n) (*).$$

Les x, y sont les coordonnées rectangulaires des sommets. Remplaçant les coordonnées par leurs valeurs en fonction

(*) Cette formule se simplifie quand on l'écrit ainsi :

$$y_1 (x_2 - x_n) + y_2 (x_3 - x_1) + \ldots + y_n (x_1 - x_{n-1}).$$

Il y a moitié moins de multiplications et elles sont faciles.

des côtés et des angles, on obtient l'aire en fonction des mêmes éléments.

Cinquième section (60-67). Quelques problèmes polygonométriques particuliers, et applications pratiques.

PROBLÈME X. *Un polygone est complétement donné; mener par un des sommets une droite qui en retranche une aire donnée.*

Solution. Heptagone. 1234567;
on a

$$A_2 = 107^\circ 38' 30''; \quad A_3 = 116^\circ 10' 22'';$$
$$A_4 = 245^\circ 30'; \quad A_5 = 103^\circ 10' 40'';$$
$$A_6 = 139^\circ 40' 19''; \quad A_7 = 89^\circ 2' 37'';$$
$$a_1 = 857; \quad a_2 = 1098; \quad a_3 = 780$$
$$a_4 = 925; \quad a_5 = 943; \quad a_6 = 927; \quad a_7 = 835.$$

Il s'agit de mener par le sommet 1 une droite qui retranche l'aire 1612800.

On calcule successivement les aires doubles des figures 123, 1234, 12345, 123456. On trouve pour

12345	double aire	2190074,
1234561	—	4618740,3.

Le double de l'aire à retrancher est 3225600, nombre compris entre les deux dernières; la transversale cherchée doit donc couper le côté a_5. Soit m le point d'intersection dans le polygone 12345 m; on connaît l'aire et les côtés moins $1m$ et $5m$; alors par les formules connues, on obtient

$$5m = 402,072.$$

Sixième section (67-79). Changement de coordonnées; calcul des nouvelles coordonnées.

Coordonnées rectangulaires en coordonnées rectangulaires.

Coordonnées d'un point M :

$$x = -\ 283{,}972;\quad y = +\ 1827{,}964.$$

Coordonnées de la nouvelle origine :

$$a = 37{,}825;\quad b = -\ 12{,}830.$$

Le système a tourné d'un angle $\varphi = 15^\circ\ 2'\ 11'',5$.
Nouvelles coordonnées :

$$x' = +\ 166{,}788;\quad y' = +\ 1861{,}251.$$

Exercices tirés du même ouvrage.

$$411 \sin 148^\circ\ 40'\ 26'' = 213{,}682;$$
$$108253{,}95 \cos 986^\circ\ 2'\ 32'' = -\ 7471{,}833;$$
$$697 \sin 1058^\circ\ 2'\ 38'',8 = -\ 260{,}603;$$
$$815 \operatorname{tang} 1153^\circ\ 34'\ 6'',8 = 2865257;$$
$$3944{,}81 \cot 196^\circ\ 3'\ 6'' = 13710{,}51;$$
$$519{,}536 \cos 262^\circ\ 46' = -\ 35026{,}26;$$
$$\frac{195{,}05 \cdot \sin 177^\circ\ 2'\ 40''}{\sin 146^\circ\ 38'\ 50''} = 18{,}2924.$$

Quadrilatère non convexe :

$$a_1 = 897{,}139;\quad a_2 = 610;\quad a_3 = 620;$$

$A_2 = 120^\circ\ 36'\ 19''$ (intérieur) ; $A_3 = 252^\circ\ 57'\ 48''$ (extérieur) ;
on obtient

$A_1 = 11^\circ\ 50'\ 28''$ (intérieur) ; $A_4 = 334^\circ\ 35'\ 25''$ (extérieur).

Octogone complet ; convexe.

$A_1 = 144^\circ\ 29'$; $A_2 = 122^\circ\ 25'$; $A_3 = 141^\circ\ 33'$; $A_4 = 152^\circ\ 4'$;
$A_5 = 63^\circ\ 19$; $A_6 = 238^\circ\ 12'$; $A_7 = 87^\circ\ 54'$; $A_8 = 132^\circ\ 4'$;
$a_1 = 1400$; $a_2 = 1768$; $a_3 = 1329$; $a_4 = 1726$;
$a_5 = 1204$; $a_6 = 1375$; $a_7 = 2876{,}37$; $a_8 = 481{,}61$;

aire $= 8928166{,}2$.

Endécagone complet, convexe.

$A_1 = 102°\,22'\,56'',8$; $A_2 = 107°\,38'\,30''$; $A_3 = 116°\,10'\,22''$;
$A_4 = 245°\,30'$; $A_5 = 103°\,10'\,40''$; $A_6 = 119°\,10'\,10''$;
$A_7 = 84°$; $A_8 = 275°\,31'\,28''$; $A_9 = 120°$; $A_{10} = 107°\,2'\,2''$;
$A_{11} = 239°\,23'\,41'',2$;
$a_1 = 857$; $a_2 = 1098$; $a_3 = 780$; $a_4 = 925$; $a_5 = 943$;
$a_6 = 624$; $a_7 = 697$; $a_8 = 845$; $a_9 = 620$; $a_{10} = 610$;
$a_{11} = 897,14$;
aire $= 3486697,36$.

Polygone de vingt et un côtés.

$A_1 = 125°\,39'\,33''$; $A_2 = 194°\,35'\,10''$; $A_3 = 103°\,1'\,30''$;
$A_4 = 124°\,22'\,36''$; $A_5 = 185°\,17'\,58''$; $A_6 = 231°\,40'\,35''$;
$A_7 = 144°\,18'\,17''$; $A_8 = 244°\,51'\,37''$; $A_9 = 156°\,0'\,40''$;
$A_{10} = 144°\,59'\,20''$; $A_{11} = 46°\,12'\,10''$; $A_{12} = 242°\,52'\,45''$;
$A_{13} = 144°\,46'$; $A_{14} = 110°\,10'\,57''$; $A_{15} = 275°\,16'\,38''$;
$A_{16} = 201°\,6'\,15''$; $A_{17} = 117°\,6'\,31''$; $A_{18} = 89°\,44'\,49''$;
$A_{19} = 197°\,4'\,2''$; $A_{20} = 204°\,12'\,58''$; $A_{21} = 136°\,39'\,59''$;
$a_1 = 4375$; $a_2 = 4005,9$; $a_3 = 5590,2$;
$a_4 = 3991,2$; $a_5 = 1754,5$; $a_6 = 2183,1$;
$a_7 = 475,8$; $a_8 = 2709,3$; $a_9 = 5558$;
$a_{10} = 4133,4$; $a_{11} = 2574,8$; $a_{12} = 2737,6$;
$a_{13} = 3519,8$; $a_{14} = 5224,1$; $a_{15} = 2357,2$;
$a_{16} = 6904,6$; $a_{17} = 5441,6$; $a_{18} = 4790,5$;
$a_{19} = 3579,9$; $a_{20} = 3460,6$; $a_{21} = 5339,03$;
aire $= 223281195$.

Les calculs du premier polygone et du troisième sont de M. Schiereck, et le calcul du deuxième polygone, de M. Pross.

Éléments d'Algèbre a l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement; par *S.-F. Lacroix*, Membre de l'Institut. 21e édition, revue, corrigée et annotée, conformément aux nouveaux *Programmes de l'enseignement dans les Lycées*; par *M. Prouhet*, professeur de Mathématiques. Paris, 1854; in-8 de 520 pages (*).

Avertissement pour la 21e édition.

« Les ouvrages de M. Lacroix jouissent depuis long-
» temps, en France et à l'étranger, d'une réputation
» justement méritée. Leur ensemble forme un Cours com-
» plet de Mathématiques, rédigé avec beaucoup d'ordre,
» de clarté et de rigueur. Peu de livres élémentaires ont
» été conçus avec plus de maturité, exécutés avec plus de
» soin, revus et améliorés avec plus de persévérance :
» c'est ce qui en explique le succès.
» Dans cette nouvelle édition des *Éléments d'Algèbre*,
» le texte de l'auteur a été scrupuleusement respecté. Les
» *Notes* que l'on a cru devoir y joindre, et dont les plus
» étendues ont été rejetées à la fin du volume, sont consa-
» crées au développement de quelques questions récem-
» ment exigées des candidats à l'École Polytechnique.
» Pour l'ordre et la division des matières traitées dans
» ce Supplément, on s'est entièrement conformé aux
» *Programmes officiels*, dont on a reproduit les énoncés
» en tête de chaque Note et des principaux paragraphes. »

On peut, ce me semble, ajouter que les quatorze *Notes* qui terminent le volume ne le cèdent au texte ni en clarté ni en rigueur, et que M. Prouhet a complétement atteint le but qu'il se proposait. Il eût été à désirer que plusieurs auteurs qui ont publié de nouveaux Traités conformes aux *Programmes officiels* se fussent contentés d'annoter avec autant de soin d'anciens Traités d'un mérite reconnu. Ce premier travail de M. Prouhet en demande un autre : l'an-

(*) Prix : 6 francs, chez *Mallet-Bachelier*, libraire.

notation du *Complément d'Algèbre*, où l'on trouvera certaines théories indispensables dont les *Programmes* n'ont pas même conservé la trace. Ces deux petits volumes (l'*Algèbre* et son *Complément* annotés) serviraient d'introduction à l'*Algèbre supérieure* de M. Serret, qui n'est en réalité qu'un fragment très-important d'un Traité complet d'Algèbre.

V.-A. Lebesgue,
Correspondant de l'Institut.

Année scolaire 1854-55. Agenda-memento des écoles et des nouvelles études. — Guide quotidien des élèves pour l'étude des connaissances exigées a tous les examens et la conservation de ces connaissances; par *Auguste Blum*, ingénieur et professeur, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, 1854; in-12 de 206 pages (*).

Julien (de Paris) a publié il y a quelques années un *Biomètre* destiné à inscrire, à la fin de chaque journée, ce qu'on a fait, ce qu'on a vu et appris dans la journée. C'est la tenue commerciale des livres appliquée à la vie. M. Blum propose la même idée aux élèves. Chaque page est divisée en trois compartiments, consacrés à trois jours de la semaine et du mois. La partie blanche de ces pages est très-commode pour y écrire tout ce qu'on veut. Chaque mois est suivi de recommandations inspirées par d'excellentes intentions; conseils qui seront suivis, comme toujours, par ceux qui peuvent s'en passer. En février, on recommande les interrogations sur la *Chimie* comme le meilleur procédé pour corriger *les défauts de prononciation*. La connexion entre février, la prononciation et la Chimie semble difficile à établir. N'importe, cet almanach de poche est préférable à beaucoup d'autres.

(*) Prix : broché, 1 franc. — Cartonné avec fermoir en cuivre, $1^f,50^c$, chez *Mallet-Bachelier*, libraire.