NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

Arithmologie. Théorème sur une équation du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 412-413

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__412_1>

ARITHMOLOGIE.

THÉORÈME SUR UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. LEBESGUE.

---

1. LEMME. *Tout nombre de la forme* $4n + 2$ *est décomposable en trois carrés* (*voir* LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, 2e édition, tome I, page 393).

Observation. Ce théorème est énoncé par Euler dans une lettre à Goldbach, datée de Berlin, 25 juin 1748 (*Corresp. math. et physique*, tome I, page 448). Il ajoute qu'il a vérifié que tout nombre de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n + 2$ est la somme de trois carrés (zéro non exclu); mais qu'il n'a pas pu encore en trouver la démonstration. On la doit à Legendre (*Hist. de l'Acad. de Paris*, 1785, page 507; voir aussi *Disquisitiones arithmeticæ*, page 504).

2. THÉORÈME. N *étant un nombre entier positif, on peut toujours satisfaire à l'équation*

$$4mn - m - n + x^2 + y^2 + y = \text{N}. \quad (\text{EULER.})$$

Démonstration. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$[2(m+n)-1]^2-4(m-n)^2+4x^2+(2y+1)^2=4N+2;$$

d'où

$$[2(m+n)-1]^2+4x^2+(2y+1)^2=4[N+(m-n)^2]+2.$$

Le membre à droite est de la forme $4p+2$; donc, d'après le lemme, il est décomposable en trois carrés dont l'un doit être évidemment pair.