Théorèmes sur la décomposition des nombres en sommes de carrés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 360-361

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__360_0>

THÉORÈMES SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN SOMMES DE CARRÉS.

1. Le nombre des solutions de l'équation

$$x^2 + 2y^2 = n$$

est égal au double de l'excès du nombre des diviseurs de n qui sont de l'une des deux formes

$$\dot{8} + 1, \quad \dot{8} + 3,$$

sur le nombre de diviseurs qui sont de la forme

$$\dot{8} + 5, \quad \dot{8} + 7.$$ (LEJEUNE-DIRICHLET.)

2. n est un nombre impair positif; le nombre des solutions de l'équation

$$4n = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

est égal à la somme des facteurs de n, lorsque w, x, y, z sont des nombres impairs. (JACOBI.)

3. Soient m et p deux nombres premiers, et

$$p = m\pi + 1;$$

soit g une racine primitive relative au module p, et soit la congruence

$$g^e - a = \dot{p},$$

e étant l'*indice* de a, c'est-à-dire que, pour des exposants inférieurs à e, la congruence n'a pas lieu. Donnant à a successivement toutes les valeurs de la suite

$$1.2, \quad 2.3, \quad 3.4, \ldots, \quad (p-2)(p-1)$$

(doubles des nombres triangulaires), si

a_0 est le nombre des indices e de la forme		$\dot{m}$,
a_1	id.	$\dot{m}+1$,
a_2	id.	$\dot{m}+2$,
.		
a_i	id.	$\dot{m}+i$,
.		
a_{m-1}	id.	$\dot{m}+m-1$,

nous aurons

$$2p=(a_0-a_1)^2+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_{m-1}-a_0)^2.$$

(LEBESGUE.)

4. $(2a-b)^2+3b^2=(2b-a)^2+3a^2=(a+b)^2+3(a-b)^2$
$=4(a^2-ab+b^2)$,

un des quatre nombres a, b, $a+b$, $a-b$ est divisible par 3.

Observation. On a dit qu'il fallait admettre dans

$$x^2+y^2=65^2,$$

comme une solution de décomposition,

$$65^2=65^0+0^2 \quad \text{(page 270)}.$$

On oppose à cette assertion qu'il faudrait admettre : 1° que le zéro est un entier; 2° que chaque carré est toujours décomposable en deux carrés; 3° que le tout est égal à sa partie. Donc il semble que, pour éviter ces trois absurdités, la décomposition 65^2+0^2 ne doit pas être admise. Nous répondons que, *analytiquement parlant*, zéro est le premier des *nombres entiers pairs*; que, dans le même sens, un carré est non-seulement décomposable en deux carrés, mais en mille carrés. Il y a une foule de questions, où zéro est admis *analytiquement* comme une solution (*). Je ne comprends pas la troisième objection.

(*) Par exemple, tout nombre est la somme de quatre carrés. (FERMAT.)