N. DEVYLDER

Solution de la question 289

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 331-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__331_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 289

(voir p. 192);

PAR M. N. DEVYLDER,
Professeur à l'Athénée royal de Namur.

1°. Soit d'abord

$$CAD = CBE.$$

Les deux triangles CAD et CBE sont semblables et fournissent la proportion

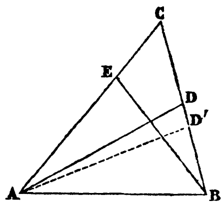
$$\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}.$$

Mais AC est $>$ BC, puisque l'on a

$$A < B.$$

Donc

$$AD > BE. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$



2°. Soit

$$CAD < CBE.$$

Faisons l'angle

$$CAD' = CBE.$$

La droite AD′ fera, avec la droite CB, un angle AD′B plus grand que l'angle ADB, qui forme l'inclinaison de la droite AD sur CB; car on a évidemment

$$\hat{C} + CAD' > \hat{C} + CAD.$$

Par conséquent,

$$AD > AD'.$$

Mais, d'après ce qui précède,

$$AD' > BE;$$

donc, à fortiori,

$$AD > BE.$$

3°. Soient

$$AD = BE \quad \text{et} \quad \frac{DAB}{DAC} = \frac{EBA}{EBC},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{DAC}{CAB} = \frac{EB}{EBA};$$

je dis que l'on aura

$$CAB = CBA.$$

Car supposons que l'on puisse avoir

$$CAB \gtrless CBA,$$

on aurait dès lors

$$DAC \gtrless EBC;$$

et, d'après ce qui vient d'être démontré, on devrait avoir

$$AD \lessgtr BE.$$

Mais, par hypothèse,

$$AD = BE;$$

donc

$$A = B. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cas particulier. Si les bissectrices de deux angles d'un triangle sont égales, le triangle est isocèle.

M. E. Lavelaine de Maubeuge (lycée de Montpellier), construit un triangle, connaissant la base, la hauteur et la bissectrice de l'angle opposé à la base, et démontre ensuite : 1° que deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux lorsqu'on a

$$A = A', \quad BC = B'C';$$

$$\text{bissectrice } AD = \text{bissectrice } A'D';$$

2° dans un triangle rectiligne, au plus petit angle correspond la plus grande bissectrice, à l'angle moyen la moyenne bissectrice, et au plus grand angle la plus petite bissectrice.

Soit, dans le triangle ABC,

$$B > A;$$

alors

$$\text{bissectrice } AD > \text{bissectrice } BE.$$

En effet,

$$\overline{AD}^2 = AC.AB - DC.BD, \quad AC > BC,$$
$$\overline{BC}^2 = BC.AB - EC.EA;$$

or

$$AC.AB > BC.AB, \quad EA = \frac{AC.AB}{AB + BC}, \quad BD = \frac{BC.AB}{AB + AC};$$

donc

$$EA > BD.$$

On verra de même que

$$EC > DC;$$

donc

$$EC.EA > DC.BD;$$

par conséquent,

$$AD > BE.$$

Ensuite M. Lavelaine résout la question 289 à peu près comme ci-dessus.