PIOBERT

Formules pratiques de quadrature

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 323-331
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__323_1>

FORMULES PRATIQUES DE QUADRATURE (*);

PAR M. PIOBERT.

La nécessité d'évaluer les aires des courbes se présentant fréquemment dans la pratique et dans les intégrations, cette question a été traitée analytiquement par plusieurs géomètres, qui ont plutôt cherché à obtenir une grande exactitude dans les résultats que la simplicité dans les opérations à effectuer; cependant la commodité des calculs est une qualité indispensable à toute formule, pour qu'elle puisse devenir usuelle.

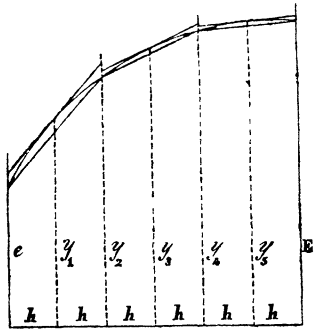
Les méthodes qui conduisent aux solutions les plus

(*) *Voir* tome X, page 410.

simples peuvent être facilement déduites de considérations géométriques.

1. Th. Simpson, qui a donné une formule très-élégante, très-simple et généralement très-approchée, ramène la question à trouver la surface comprise entre une courbe et un axe, et limitée par deux ordonnées extrêmes e et E (*fig.* 1); puis il divise cette surface en un nombre pair

Fig. 1.



de parties de même largeur h au moyen d'ordonnées équidistantes entre elles. On a alors deux figures faciles à évaluer, entre lesquelles la surface cherchée se trouve comprise, en traçant deux polygones, l'un intérieur ou inscrit, l'autre extérieur. Le polygone inscrit est formé par l'axe, les deux ordonnées extrêmes et les cordes qui réunissent deux à deux les sommets voisins de toutes les ordonnées de rang pair. Si l'on nomme I la surface, on a

$$I = h(e + 2\Sigma y_p + E),$$

Σy_p représentant la somme des longueurs des ordonnées de rang pair, e et E exceptés, comprises entre l'axe et la courbe. Le polygone extérieur est en quelque sorte circonscrit à la courbe, ou plutôt il est formé des tangentes à la courbe menées aux sommets des ordonnées impaires et terminées aux ordonnées paires comme les cordes du premier polygone, puis des petites portions de ces ordonnées paires comprises entre deux tangentes consécutives. Soit C la surface de ce polygone circonscrit, on a

$$C = 2h\Sigma y_i,$$

Σy_i représentant la somme des ordonnées de rang impair.

Chaque portion de courbe comprise entre sa corde et sa tangente, peut, tant que ces deux droites ne sont pas trop inclinées l'une sur l'autre, être considérée comme différant peu d'un arc de parabole dont l'axe serait parallèle aux coordonnées; mais tout arc de parabole comprend dans sa concavité les deux tiers de la surface du parallélogramme circonscrit, aire qui est alors sensiblement égale à celle du quadrilatère formé par la tangente, la corde et les portions d'ordonnées qui réunissent leurs extrémités. Si S est la surface cherchée,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} S &= I + \frac{2}{3}(C - I) = \frac{1}{3}(2C + I) \\ &= \frac{h}{3}(e + 4\Sigma y_i + 2\Sigma y_p + E), \end{aligned}\right.$$

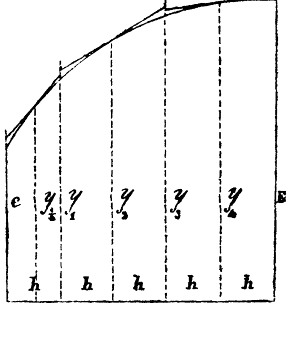
formule de Simpson.

Pour que la corde soit à peu près parallèle à la tangente au point de la courbe situé sur la même ordonnée que son milieu, il faut que la courbure de l'arc diminue sensiblement à mesure que la direction de la courbe se rapproche de celle des ordonnées; si cette diminution n'est pas aussi grande que dans la parabole à axe parallèle aux ordonnées, le quadrilatère circonscrit, ou l'espace qui sépare les deux polygones, a une surface moins grande que celle du parallélogramme également circonscrit au même segment, et la formule de Simpson donne une évaluation trop faible pour les courbes convexes, ou dont la concavité est tournée vers l'axe, et trop forte pour celles dont la courbure est en sens contraire. Cela a lieu également, mais dans des limites plus restreintes, lorsque la courbure des arcs diminue plus rapidement que dans la parabole à axe parallèle aux ordonnées, courbe pour laquelle la tangente est parallèle à la corde et la formule de Simpson exacte.

Cette formule, qui donne généralement une grande approximation, est beaucoup moins exacte pour les surfaces dont les contours ont une courbure très-prononcée, comme pour les sommets de courbe, lorsque les éléments des arcs sont peu inclinés par rapport aux ordonnées; il est alors indispensable de changer la direction de ces dernières : ainsi la parabole, pour laquelle la formule est toujours exacte lorsque les ordonnées sont parallèles à son axe, n'est évaluée, dans sa position ordinaire et à partir de son sommet, qu'avec une erreur en moins de $\frac{1}{23,314}$ de la surface véritable.

2. Lorsque, comme dans ce dernier cas, la courbure est très-grande à l'origine des coordonnées, que la direction des éléments de la courbe est peu inclinée sur celle des ordonnées et qu'il n'est pas possible de changer ces dernières, il ne faut pas employer le polygone inscrit qui s'éloigne beaucoup de la courbe dans cette partie; mais il convient alors de rapprocher le polygone extérieur de cette partie de la courbe, en divisant la surface en un nombre impair de parties (*fig.* 2), et en se servant de la

Fig. 2.



longueur $y_{\frac{1}{2}}$ de l'ordonnée située au milieu de la première division : on a ainsi

$$(2) \qquad S = h\left(y_{\frac{1}{2}} + 2\Sigma y_p\right),$$

formule qui donne, dans le cas très-défavorable de l'exemple précédent, moitié moins d'erreur que la formule de Simpson, c'est-à-dire qui ne diffère que de $\frac{1}{49,495}$ de la surface véritable de la parabole. Cette méthode réussit très-bien dans beaucoup d'intégrations.

3. Comme dans les circonstances où la formule de Simpson est le plus en défaut, le polygone inscrit s'éloigne beaucoup du polygone extérieur, on serait tenté de doubler le nombre de ses côtés, en joignant les sommets de toutes les ordonnées, ce qui diminue d'environ moitié la surface comprise entre les deux polygones, surface dont la répartition en dehors et en dedans de la courbe cause l'erreur d'évaluation ; mais, par une suite de compensations, on retombe encore sur la formule de Simpson.

On réussit mieux en ne réduisant de longueur que la première et la dernière corde, qui, en général, divergent le plus de la tangente, et en limitant les autres aux sommets des ordonnées impaires, les seules employées alors à l'évaluation de la surface ; de sorte que, pour un même nombre d'ordonnées connues, on réduit de près de moitié, ou dans le rapport de $2n+1$ à $n+2$, la longueur des arcs. La surface comprise entre les deux polygones étant également beaucoup diminuée dans les points où elle est la plus étendue, on n'a pas besoin d'évaluer très-exactement la répartition à faire entre les petits triangles mixtilignes intérieurs et extérieurs ; aussi M. Poncelet a obtenu une formule assez approchée, en prenant simplement la moyenne des surfaces des deux polygones inscrit et circonscrit.

Dans ce cas, le polygone inscrit a pour surface

$$J = h\left(\frac{e - y_1}{2} + 2\,\Sigma y_i + \frac{E - y_{2n-1}}{2}\right),$$

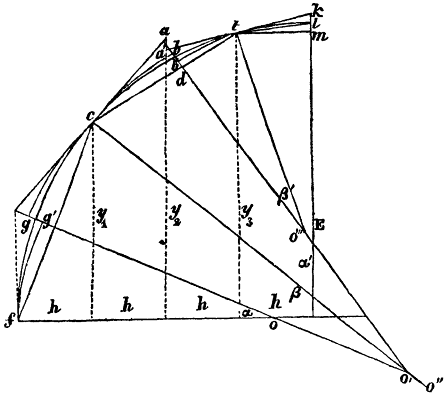
d'où

$$(3) \qquad S = \frac{J + C}{2} = h\left(\frac{e - y_1}{4} + 2\,\Sigma y_i + \frac{E - y_{2n-1}}{4}\right),$$

valeur un peu faible pour les courbes convexes à l'extérieur, et qui, dans le cas défavorable de la parabole ordinaire, diffère de la véritable surface de $\frac{1}{102,8}$.

4. Il est possible d'évaluer très-approximativement le rapport des surfaces comprises entre la courbe et les polygones extérieur et intérieur, en supposant, ce qui est permis pour de petits arcs, que chacune des portions *ct* de la courbe (*fig.* 3) est composée de deux arcs de cercle *cb* et

Fig. 3.



b't ayant, en *c* et en *t*, mêmes tangentes qu'elle, ou même polygone extérieur, et mesurant les angles α' et β' des cordes et des tangentes. En effet, si l'on mène à la corde *ct* une perpendiculaire bo'', telle que aa', portion d'ordonnée comprise entre les deux tangentes consécutives, soit partagée de manière que les deux très-petits triangles formés par ces lignes soient égaux, on voit que la surface comprise entre le sinus de l'arc *cb* et la tangente est

$$\frac{r^2}{2}(\operatorname{tang}\alpha' - \sin\alpha'\cos\alpha');$$

la surface comprise entre le même arc *cb* et la portion de corde *cd* ou son sinus est

$$\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha'}{180^\circ} - \sin\alpha'\cos\alpha'\right).$$

Le rapport de ces deux quantités

$$R = \frac{2\operatorname{tang}\alpha' - \sin 2\alpha'}{\frac{\pi\alpha'}{90^\circ} - \sin 2\alpha'},$$

n'est fonction que de la grandeur angulaire ou de l'amplitude des portions de la courbe; on peut donc former une Table de ses différentes valeurs.

$\alpha =$	0	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
R =	1,50000	1,50009	1,50037	1,50082	1,50147	1,50229	1,50331	1,50451
$\alpha =$	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°
R =	1,50590	1,50748	1,50926	1,51124	1,51342	1,51580	1,51839	1,52119
$\alpha =$	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°
R =	1,52422	1,52747	1,53094	1,53464	1,53862	1,54283	1,54728	1,55200
$\alpha =$	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	45°
R =	1,55699	1,56228	1,56787	1,57376	1,57996	1,58649	1,59337	1,75192

Lorsque la direction des extrémités de la courbe ne se rapproche pas de celle des ordonnées, il convient de modifier la valeur de *e* ou de E; ainsi, quand l'élément extrême est parallèle à l'axe, on fait $E = y_{2n-1}$ dans l'expression de la surface; ce qui revient à prendre pour der nier côté du polygone inscrit le sinus *tm* au lieu de la corde *tl*.

La Table des rapports R permet d'atteindre à une assez grande précision, lors même que les divisions de la surface comprennent des arcs très-prononcés. Si la courbe est divisée en arcs assez petits pour que leur amplitude ne dépasse pas 7 à 8 degrés par exemple, en prenant $R = 1,50$, la correction ne serait que de $\frac{1}{450}$ de la différence des surfaces inscrites et circonscrites, qui déjà diffèrent assez peu entre elles. On a alors

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} S &= J + \frac{3}{2}(C - J) = \frac{1}{3}J + \frac{2}{3}C \\ &= h\left(\frac{e - y_1}{6} + 2\Sigma y_i + \frac{E - y_{n-1}}{6}\right), \end{aligned} \right.$$

qui donne une valeur un peu plus grande que celle de la surface des courbes convexes; dans le cas très-défavorable de la parabole des exemples précédents, l'erreur est de $\frac{1}{608,8}$.

5. L'évaluation de la surface d'un quart de cercle au moyen des différentes formules (1), (2), (3) et (4), présente des résultats analogues à ceux qui ont été donnés précédemment pour la parabole dans sa position ordinaire. Ainsi, en prenant le rayon égal à l'unité et employant dix ordonnées, on a les approximations suivantes :

Avec la formule de Simpson (1)...........	$-$ 0,003646
Avec le polygone circonscrit (2)............	$+$ 0,001825
Avec la formule de M. Poncelet (3).........	$-$ 0,001183
En supposant $R = 1,50$, formule (4).....	$+$ 0,000130
Avec la modification de E et une valeur moyenne de R...........................	$+$ 0,000088

Cette dernière méthode est surtout avantageuse quand on n'a qu'un petit nombre de valeurs d'ordonnées de la courbe. Si, par exemple, on n'en avait que deux dans le cas précédent, les approximations seraient les suivantes :

Avec la formule de Simpson (1)............	— 0,041381
Avec le polygone circonscrit (2)............	+ 0,014696
Avec la formule de M. Poncelet (3)........	— 0,014912
En supposant R = 1,50, formule (4)......	+ 0,003206
Avec la modificat ion de.................	+ 0,001883
Avec cette modification et une moyenne valeur de R..............	+ 0,000462

Ces formules ne sont plus classées de la même manière quand les arcs de grande courbure sont placés moins défavorablement; ainsi, pour l'hyperbole équilatère ayant pour équation $xy = 1$, et dans les limites de $x = 1$ à $x = 2$, en employant dix ordonnées, les approximations sont :

Avec la formule de Simpson (1).........	+ 0,0000030З9
Avec le polygone circonscrit (2).........	— 0,000278846
Avec la formule de M. Poncelet (3)	+ 0,000123016
En supposant R = 1,50, formule (4)....	— 0,000021978
Avec la modification de E et une valeur moyenne de R...	— 0,000013634

La formule de Simpson reprend alors ses avantages.