L. PAINVIN

Solution de la question 260

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 306-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__306_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 260

(voir t. IV, p. 577, et t. XI, p. 368);

PAR M. L. PAINVIN,
Licencié ès Sciences Mathématiques.

Trouver l'équation de la courbe qui coupe, sous un angle constant, toutes les génératrices d'un cône du second degré.

Tout cône du second degré pouvant être regardé comme un cône droit à base elliptique, l'équation générale des cônes du second degré sera

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{1}$$

En un point (x, y, z), l'angle formé par la génératrice et la tangente sera

$$\frac{x}{r}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{y}{r}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{z}{r}\cdot\frac{dz}{ds},$$

et l'on devra avoir

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{r\,ds}=m, \tag{2}$$

m étant une constante égale au cosinus de l'angle des deux droites r et ds.

Or nous avons

$$\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{r}=dr,$$

donc

$$\frac{dr}{ds}=m;$$

c'est-à-dire que si l'on s'avance sur la courbe cherchée, les rayons vecteurs sont proportionnels aux accroissements des arcs. Et réciproquement, si cette proportionnalité a lieu, l'angle de la tangente et du rayon vecteur est constant. Partons de cette propriété, et employons les coordonnées sphériques

$$(3)\qquad \begin{cases} dr^2 = m^2\, ds^2, \\ ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2, \end{cases}$$

les formules de transformation étant

$$(4)\qquad \begin{cases} x = r \sin\theta . \cos\varphi, \\ y = r \sin\theta . \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta, \end{cases}$$

r étant le rayon vecteur, φ l'angle de la projection de ce rayon vecteur sur le plan des xy avec l'axe des x, θ l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des z.

Substituons ces valeurs dans l'équation (1); les équations de la courbe cherchée seront

$$(5)\qquad \frac{r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} - \frac{r^2 \cos^2\theta}{c^2} = 0,$$

$$(6)\qquad dr^2 = m^2 (dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Éliminant θ et sa différentielle, on obtient

$$(7)\quad \frac{dr}{r} = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \cdot \frac{abd\varphi \sqrt{[a^2b^2 + c^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + c^4(b^2-a^2)\sin^2\varphi]}}{[a^2b^2 + c^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)]\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Les équations (5) et (7) seront donc les équations de la courbe cherchée.

Discussion de l'équation (7).

Nous avons trouvé

$$\frac{dr}{r} = \pm \frac{m.ab.d\varphi}{\sqrt{1-m^2}\,[a^2b^2 + c^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)]}$$

$$\times \sqrt{\frac{[a^2b^2 + c^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)](a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + c^4(b^2-a^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{r} &= \pm \frac{mabd\varphi}{\sqrt{1-m^2}[b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2-b^2)\sin^2\varphi]} \\ &\times \sqrt{\frac{b^4(a^2+c^2)+(a^2-b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\sin^2\varphi}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}}. \end{aligned} \right.$$

Or l'intégrale de cette équation dépend des fonctions elliptiques, et l'on trouve que

$$l.r = \mathrm{K}[\mathrm{M}\Pi(\mathrm{A}, e, \omega) + \mathrm{NF}(e, \omega)],$$

c'est-à-dire que le logarithme de r dépend d'une fonction elliptique de troisième espèce et d'une fonction elliptique de première espèce; K, M, N sont des coefficients constants.

Posons

$$k = \frac{mab}{\sqrt{1-m^2}},$$

$$\Phi = \int \frac{d\varphi}{[b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2-b^2)\sin^2\varphi]}$$
$$\times \sqrt{\frac{b^4(a^2+c^2)+(a^2-b^2)(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)\sin^2\varphi}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}}.$$

Si nous prenons l'intégrale à partir de $\varphi = 0$, et $r = 1$ pour cette valeur de φ, la constante arbitraire est nulle, et nous aurons

$$(9)\qquad r = e^{\pm k\Phi}.$$

Premier cas. Si $m > 0$, m est le cosinus de l'angle de la tangente avec la génératrice.

I. $a > b$. Prenons d'abord le signe $+$.

Si nous faisons croître φ de 0 à $+\infty$ (comptons les arcs positifs en allant de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs), l'élément de l'intégrale reste toujours positif, donc Φ croît en même temps, et il croît indéfiniment.

En effet,

$$\Phi > \frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}\int_0^{\varphi} d\varphi + \frac{b}{\sqrt{a^2-c^2}}\int_{\varphi}^{h} d\varphi;$$

on voit facilement que $a\sqrt{b^2-c^2}$ est la plus petite valeur de la fonction qui est sous le signe $\int$; donc, en prenant φ suffisamment grand,

$$\Phi > \frac{b\varphi}{\sqrt{a^2+c^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+c^2}}(h-\varphi),$$

la première partie est une quantité finie, la seconde partie croît indéfiniment avec h; donc, lorsque φ croît de o à ∞, Φ croît aussi de o à ∞, et par conséquent r croît de 1 à ∞, c'est-à-dire la courbe s'enroule sur le cône, en allant de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs. Maintenant, faisons décroître φ de o à $-\infty$; Φ décroîtra de o à $-\infty$, et r décroîtra depuis l'unité jusqu'à zéro; donc la courbe s'enroule sur le cône en allant des x positifs vers les y négatifs, en se rapprochant indéfiniment du sommet du cône, qui est pour ainsi dire un point asymptotique.

Si l'on cherche la projection de cette courbe sur le plan des xy, ρ étant son rayon vecteur, on a

$$(10)\quad \rho = r\sin\theta = \frac{abe^{+k\Phi}}{\sqrt{b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2-b^2)\sin^2\varphi}}.$$

Cette courbe est une spirale dont l'origine est un point asymptotique, et qui se développe dans le même sens que la courbe dont elle est la projection.

Si l'on cherche l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, on aura l'angle de la projection de la tangente à la courbe avec la projection de la génératrice qui passe en ce point considéré, et l'on voit que lorsque φ varie de o à $\frac{\pi}{2}$, de $\frac{\pi}{2}$ à π, la tangente trigonométrique de cet angle va de $\frac{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{1-m^2}}{ma}$ à $\frac{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{1-m^2}}{mb}$, puis de cette dernière valeur à la première, et ainsi de suite, elle ne passe jamais ni par zéro ni par l'infini; l'expression de cette tangente est

$$(11)\quad \operatorname{tang}\mu = \frac{[b^2(a^2+c^2)+c^2\ a^2-b^2)\sin^2\varphi]\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}}{k\sqrt{b^4(a^2+c^2)+(a^2-b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\sin^2\varphi}-c^2(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}}.$$

Si l'on prend le signe —, les mêmes résultats se retrouveront dans un ordre inverse.

II. Cône de révolution. $a=b$. Dans ce cas Φ est intégrable, et l'on trouve

$$(12)\qquad r = e^{\pm\frac{k}{a\sqrt{a^2+c^2}}\varphi}.$$

La discussion est facile, et donne des résultats analogues aux précédents.

La projection de la courbe a pour équation

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}e^{\pm\frac{k}{a\sqrt{a^2+c^2}}\varphi}.$$

C'est une spirale logarithmique.

Dans ce cas,

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{ma}\sqrt{1-m^2} = \text{const.};$$

donc la projection de la tangente fait aussi un angle constant avec la projection de la génératrice; propriété qui pouvait d'ailleurs se déduire de ce que la projection de la courbe est une spirale logarithmique.

III. Si $a < b$, on voit que dans Φ les radicaux ne deviennent ni nuls, ni imaginaires, quelque valeur que l'on donne à φ; la quantité qui est en dehors du radical ne peut non plus devenir ni nulle, ni négative; donc la marche suivie pour le premier cas est applicable ici, et l'on arrive à des résultats analogues.

Deuxième cas. $m < 0$, en mettant en évidence le signe

$$r = e^{\pm k\Phi}.$$

La discussion est la même que pour le premier cas; on trouvera des résultats inverses.

Troisième cas. $m = 0$, c'est-à-dire si la tangente doit être perpendiculaire à la génératrice; alors

$$k = 0, \quad r = 1,$$

c'est-à-dire, la courbe cherchée est donnée par l'intersection du cône avec une sphère de rayon 1 ayant son centre à l'origine : c'est donc une *conique sphérique*.

Quatrième cas. Si

$$m = 1, \quad k = \infty,$$

alors

$$r = \infty \quad \text{ou} \quad r = 0;$$

c'est-à-dire que dans ce cas il n'y a pas de courbe, ou elle se réduit au sommet du cône.

Rectification de la courbe.

$$dr = mds;$$

donc

$$s = \frac{r - 1}{m},$$

en comptant les arcs à partir du point où l'on a

$$\varphi = 0 \quad et \quad r = 1,$$

que je désignerai par A; d'où

$$s = \frac{e^{\pm k\Phi} - 1}{m}.$$

Premier cas. On voit, si l'on prend le signe +, que la longueur de la courbe croît indéfiniment à partir de A, en s'élevant sur le cône; et sa longueur, depuis le point A jusqu'au sommet du cône, est égale à $\frac{1}{m}$.

Cette expression de s n'est intégrable que dans le cas où $a = b$.

Deuxième cas. Si

$$m = 1, \quad r = \infty \quad \text{ou} \quad r = 0,$$

alors

$$s = \infty \quad \text{ou} \quad s = 1,$$

ce que l'on pouvait prévoir.

Troisième cas. Si $m = 0$, la formule ci-dessus donne l'indétermination; alors on a recours aux équations de la courbe

$$r = 1, \qquad \frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} = \frac{\cos^2\theta}{c^2},$$

et l'on trouve

$$ds = \frac{abd\varphi}{[b^2(a^2+c^2) + c^2(a^2-b^2)\sin^2\varphi]}$$
$$\times \sqrt{\frac{b^4(a^2+c^2) + (a^2-b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\sin^2\varphi}{b^2 + (a^2-b^2)\sin^2\varphi}},$$

qui n'est intégrable que dans le cas où $a = b$; on a alors

$$s = \frac{a\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2}};$$

la constante est nulle si $s = 0$ pour $\varphi = 0$.

La longueur de la courbe croît proportionnellement aux arcs.

Même question pour les cylindres dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Dans les cylindres à base elliptique ou hyperbolique, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles de la tangente en un point (x, y, z) avec les axes ; 0, 0, 1 sont les cosinus des angles de la génératrice avec les axes ; on a donc

$$dz = m\,ds,$$

m étant une constante.

Pour un calcul facile, on arrive aux équations de la courbe

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(2) \qquad z = \pm \frac{m}{a\sqrt{1 - m^2}} \int_0^x \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx.$$

Si a est différent de b, cette intégrale dépend des fonctions elliptiques.

Dans le cas du cylindre elliptique, la condition nécessaire et suffisante pour que les radicaux restent réels, est que x soit $< a$.

La discussion se ferait comme dans le cas précédent.

Dans le cas de $a = b$, on retrouve les équations de l'hélice.

Dans le cas de $m = 0$, on trouve une série d'ellipses égales et parallèles à celle de la base.

Le cas de $m = 1$ ne donne aucune courbe, ce qu'on pouvait prévoir.

Pour le cylindre à base hyperbolique, il faudra changer dans les résultats précédents b^2 en $-b^2$.

La condition nécessaire et suffisante pour que les radicaux soient réels, est que x soit toujours $> a$.

Le cas de $a = b$ donne une intégrale qui dépend des fonctions elliptiques.

Le cas de $m = 0$ donne une série d'hyperboles égales et parallèles à celle de la base.

Pour le cylindre à base parabolique, les équations de la courbe seront

$$(1) \qquad y^2 = 2px,$$

$$(2)\ z = \pm \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \left[\sqrt{x(p+2x)} - \frac{p}{\sqrt{2}}\, l \left(\frac{\sqrt{2x} + \sqrt{p+2x}}{\sqrt{p}} \right) \right].$$

Observations. M. Faure résout cette question à peu près de la même manière, sans discussion.