PROUHET

Étude géométrique sur les courbes engendrées par le mouvement de reptation, pour servir d'éclaircissement à plusieurs passages des œuvres de Jean Bernoulli

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 274-282

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__274_1>

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE.

Sur les courbes engendrées par le mouvement de reptation, pour servir d'éclaircissement à plusieurs passages des OEuvres de Jean Bernoulli.

PAR M. PROUHET,

Professeur.

Les OEuvres de J. Bernoulli (*) renferment plusieurs théorèmes d'une rare beauté, qui excitèrent dans le temps l'admiration de Leibnitz, mais qui, négligés, à ce qu'il paraît, par leur propre inventeur, ne tardèrent pas à tomber dans un oubli presque complet (**). M. Terquem, à l'érudition duquel ils n'avaient pas échappé; m'ayant engagé à en rétablir la démonstration, j'ai cherché à reconstruire la théorie même du grand géomètre, à l'aide d'indications puisées dans ses OEuvres. Du reste, les passages cités faisaient connaître le principe même de la méthode. Toute la difficulté résidait dans un lemme (IX) non énoncé par Bernoulli, mais qu'une étude attentive de la question ne pouvait manquer de faire découvrir.

(*) JOHANNIS BERNOULLI *Opera omnia*. Lausannæ et Genevæ, 1742, t. I, art. 26, 72, 74, 77 à 83. On peut aussi consulter le *Leibnitii et Bernoullii Commercium philosophicum et mathematicum*.

(**) Bernoulli est mort en 1748, et son dernier article sur le mouve-

Une fois en possession de ce lemme, on arrive sans peine à une formule d'approximation très-élégante et dont la démonstration semblait exiger l'emploi d'une analyse plus relevée.

Legendre (*) est, à notre connaissance, le seul auteur qui ait démontré les théorèmes de Bernoulli. Il arrive, en effet, par l'emploi des séries, à la formule d'approximation dont nous venons de parler; mais son analyse nous paraît incomplète. En donnant deux valeurs approchées d'un arc de courbe, il n'indique nullement à quel caractère on reconnaîtra qu'elles comprennent l'arc considéré. Là est peut-être le secret d'une sorte de paradoxe analytique dont Legendre ne semble pas donner une explication très-satisfaisante.

§ I. — *Du mouvement de reptation en général.*

Définitions. 1. Lorsqu'une courbe B se meut parallèlement à elle-même et de manière à être toujours tangente à une courbe fixe A, on dit que B rampe sur A (*fig.* 1).

2. Le lieu décrit par un point quelconque du plan de la courbe B est appelé *reptoire* (reptoria).

3. La courbe mobile est dite ramper *extérieurement* ou *intérieurement* sur la courbe fixe, suivant que, dans le cours du mouvement, les deux courbes sont situées de part et d'autre de la tangente commune ou du même côté. Suivant que l'un ou l'autre cas a lieu, la reptoire engendrée est dite *extérieure* ou *intérieure*.

4. L'angle formé par les normales menées aux extré-

---

ment de reptation (*motus reptorius*) est de 1709 (Lettre à Leibnitz). Cette Lettre se termine par ces mots : *Alia mirabiliora in aliam occasionem refero.* Mais il n'a rien paru de ces choses plus admirables dans les OEuvres publiées du vivant de l'auteur.

(*) *Théorie des Fonctions elliptiques*, t. II, *Appendice*.

mités d'un arc de courbe est nommé l'*amplitude* de cet arc.

Le mot amplitude n'a pas ici la même signification que dans la *Théorie des Fonctions elliptiques*. Nous nous en servirons toujours dans le sens que lui attribue Bernoulli, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire. Le point de rencontre des normales extrêmes se nommera le *centre d'amplitude*.

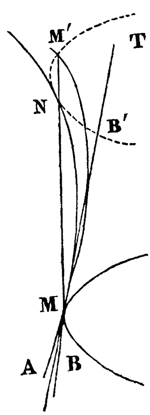
5. Dans le mouvement de reptation, les divers points d'un arc de la courbe rampante sont amenés successivement au contact en divers points d'un arc d'égale amplitude de la courbe fixe. Ces deux arcs sont appelés *arcs générateurs* de l'arc correspondant de la reptoire.

THÉORÈME I. *Dans tout mouvement de reptation, deux points quelconques du plan de la courbe mobile décrivent des reptoires égales et semblablement placées.*

Cela résulte immédiatement de ce que la longueur et l'*orientation* de la droite qui unit ces deux points ne changent pas dans tout le cours du mouvement.

THÉORÈME II. *La tangente en un point de la reptoire est parallèle à la tangente qui est actuellement commune aux deux courbes génératrices.*

Fig. 1.



Puisque les reptoires engendrées par les divers points de la figure mobile sont égales et semblablement placées, considérons comme point décrivant le point de contact M des deux courbes A et B (*fig.* 1). Je dis que la tangente à la reptoire en ce point n'est autre que MT, tangente actuellement commune aux deux courbes proposées.

En effet, imaginons que le mouvement de reptation ait amené B en B′ et M et M′. La droite MM′, corde de la reptoire, rencontrera la courbe A en un point N, d'autant plus voisin de M que la courbe B aura été moins dérangée de sa position initiale. Il suit de là que si l'on fait revenir B′ en B, M′ et N arriveront en même temps en M, et que MM′ sera, à la limite, tangente à la courbe A et à la reptoire. Elle se confondra donc avec MT. C. Q. F. D.

Remarques I. Le point M et le point décrivant peuvent être considérés, pendant un temps infiniment petit, comme se mouvant sur deux droites parallèles et dans le même sens. Il en résulte que :

Un arc de la courbe fixe et l'arc correspondant de la reptoire ont leurs concavités tournées vers la même région du plan, par rapport à deux tangentes parallèles quelconques.

Il suit de là que si les deux courbes génératrices sont convexes, la reptoire *extérieure* le sera également.

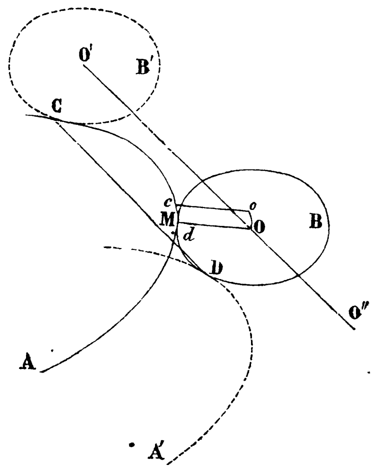
II. Dans le cas où la courbe mobile a un point d'inflexion, il est visible que si le point de contact se mouvait dans un sens avant que le point d'inflexion ait été amené au contact, il se mouvra ensuite dans le sens opposé. La direction suivie par le point M devant aussi changer de sens (Rem. I), il en résultera dans la reptoire *un point de rebroussement de seconde espèce.*

III. Une reptoire intérieure peut avoir des points de rebroussement, lors même que les deux proposées n'ont aucune inflexion. Cela vient de ce que la courbe mobile, d'abord enveloppée par la courbe fixe dans une partie de son cours, l'enveloppe au contraire dans une autre. Mais ces diverses circonstances ne peuvent être bien étudiées que sur des exemples particuliers.

IV. Un arc de reptoire a même amplitude que chacun des arcs générateurs.

Théorème III. *La reptoire engendrée par la courbe* A *rampant sur la courbe* B, *ne diffère que par la situation de la reptoire engendrée par* B *rampant sur* A.

Fig. 2.



Supposons que les deux courbes aient une tangente commune en M. Soient MC et MD deux arcs d'égale amplitude pris de part et d'autre du point M, le premier sur la courbe A, le second (*fig.* 2) sur la courbe B. Soit O le point décrivant.

Si l'on fait ramper B sur A, D viendra en C, et le point

O viendra en O′, de telle sorte que OO′ sera égal et parallèle à CD.

Si l'on fait ramper A sur B, C viendra en D, et le point point O viendra en O″, de telle sorte que OO″ sera égal et parallèle à CD.

Il suit de là que les deux points O′ et O″ sont symétriques par rapport au point O. Les deux reptoires engendrées par le point O dans ces deux mouvements, ont donc leurs points symétriques deux à deux par rapport à la position initiale O; par suite, elles ne diffèrent que par la situation.

THÉORÈME IV. *Un arc de reptoire est égal à la somme ou à la différence de ses arcs générateurs suivant que la reptoire est extérieure ou intérieure.*

Prenons sur la courbe fixe A (*fig.* 2, cas d'une reptoire extérieure) un arc infiniment petit Mc dans le sens du mouvement, et sur la courbe mobile, dans le sens contraire, un arc de même amplitude Md. Les deux arcs Mc et Md peuvent être considérés comme deux lignes droites ayant la même direction que la tangente commune en M.

La courbe B s'étant déplacée infiniment peu jusqu'à ce que d vienne en c. le point décrivant O viendra en o; par la nature du mouvement, oc sera égal et parallèle à Od, et la figure Oocd sera un parallélogramme. On aura donc Oo = Md + Mc, ce qui démontre le théorème pour les éléments des trois courbes, et, par suite, pour des portions finies de ces courbes.

Le cas d'une reptoire extérieure se traiterait d'une manière analogue.

Soit $d\sigma$ un arc infiniment petit de la reptoire, et ds, ds' les deux arcs générateurs. On aura

$$d\sigma = ds \pm ds'.$$

Mais ces trois arcs, ayant même amplitude, auront même angle de contingence $d\tau$. Donc

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} \pm \frac{ds'}{d\tau}$$

ou

$$\rho = r \pm r',$$

en appelant ρ, r, r' les rayons de courbure des trois courbes. Ainsi :

Le rayon du cercle osculateur en un point de la reptoire est égal à la somme algébrique des rayons des cercles osculateurs des courbes génératrices aux points correspondants.

D'où résulte ce corollaire :

La longueur d'un arc pris sur la développée de la reptoire est égale à la somme algébrique des longueurs des arcs correspondants pris sur les développées des deux courbes génératrices.

Lorsque deux courbes sont équidistantes, on peut considérer l'une d'elles comme la reptoire engendrée par le centre d'un cercle qui ramperait extérieurement ou intérieurement sur l'autre courbe. De là se déduisent facilement les relations connues entre les arcs de deux courbes équidistantes (*).

IV. *Si l'on imagine qu'une droite de longueur déterminée se meuve en touchant continuellement une courbe fixe, la somme algébrique des arcs décrits par ses extrémités sera égale à un arc de cercle ayant pour rayon*

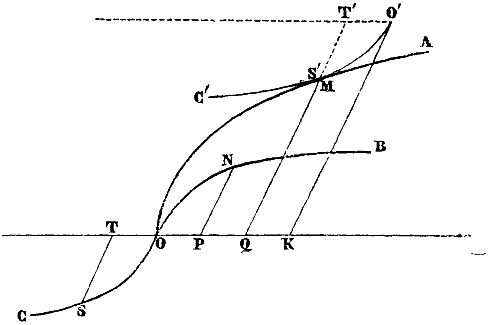
(*) Breton (de Champ), *Nouvelles Annales*, tome III, page 442. Ce théorème était connu de Leibnitz et de Bernoulli. *Voir* le *Commercium mathematicum*, tome II, page 152.

la longueur de la tangente mobile, et pour amplitude l'angle formé par les deux positions extrêmes de cette tangente.

Car les extrémités de cette tangente décrivent deux développantes de la courbe fixe, c'est-à-dire deux courbes équidistantes.

THÉORÈME V. *Soient* A *et* B *deux courbes ayant une tangente commune en* O *et leur concavité tournée dans le même sens;* OM, ON *deux arcs variables d'égale amplitude pris respectivement sur les deux courbes. Prenons le point* O *pour origine d'un système de coordonnées rectilignes, et construisons le lieu* R *des points ayant pour coordonnées la somme des coordonnées de même nom des points* M *et* N : *un arc quelconque de la courbe* R, *compté à partir du point* O, *est égal à la somme des arcs correspondants des courbes* A *et* B, *et a même amplitude que chacun d'eux.*

Fig. 3.



Faisons ramper sur A la courbe C symétrique de B par rapport à l'origine, et prenons cette origine pour point décrivant. S étant le symétrique de N, la tangente menée à la courbe C par le point S sera parallèle à la tangente menée à la courbe B par le point N, et, par suite, à la tangente menée à la courbe A par le point M. Donc le mouvement de reptation amènera le point S en M : ST, ordonnée du point S et égale (en valeur absolue) à NP, se placera en S′T′ sur MQ prolongé, et TO = OP se placera en T′O′ sur une parallèle à OX. D'où résulte, en appelant OK et O′K les coordonnées de O′,

$$\begin{aligned} O'K &= T'Q = T'S' + MQ = NP + MQ, \\ OK &= OQ + QK = OQ + T'O' = OQ + OP. \end{aligned}$$

Le point O′ est donc un point du lieu que nous avons appelé R, mais, d'un autre côté, O′ appartient à une reptoire extérieure; donc

$$\text{arc } OO' = \text{arc } OM + \text{arc } ON,$$

et, de plus, l'arc OO′ (2, IV) a même amplitude que les deux axes générateurs.

Remarque. Plus généralement, s', s'', s''', etc., soient des arcs de même amplitude ayant une origine et une tangente commune en O; (x', y'), (x'', y'') leurs extrémités; (x, y) un point quelconque d'une courbe s donnée par les équations

$$\begin{aligned} x &= a'x' + a''x'' + a'''x''' + \ldots, \\ y &= a'y' + a''y'' + a'''y''' + \ldots, \end{aligned}$$

on aura

$$s = a's' + a''s'' + \ldots.$$

Ce théorème peut se démontrer au moyen du précédent, mais on peut encore l'établir par un calcul direct, ce qui n'est pas plus long et est préférable, attendu qu'on n'a pas besoin alors de supposer que a', a'', etc., soient des nombres entiers.

(*La suite prochainement.*)