NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. COMBESCURE

Solution de la question 255

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 270-271

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__270_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 255

(voir t. XI, p. 314);

PAR M. E. COMBESCURE,
Professeur (New-York).

Si l'on substitue dans l'équation polaire d'une droite r^2 au lieu du rayon vecteur r, et 2ω au lieu de l'angle polaire ω, on obtient l'équation d'une hyperbole équilatère. D'une manière analogue, en substituant $\sqrt{-1}\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}r\right)^2$ pour $\operatorname{tang}\frac{1}{2}r$ et 2ω pour ω, dans l'équation polaire sphérique d'un grand cercle, et en changeant les constantes de manière que les imaginaires disparaissent, on tombera sur l'équation d'une hyperbole sphérique. (STREBOR.)

L'hyperbole équilatère sphérique peut être considérée comme l'intersection de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

et de l'hyperboloïde

$$1 + z^2 = a\,(x^2 - y^2);$$

son équation entre le vecteur sphérique r et la longitude ω sera donc

$$\frac{1 + \cos^2 r}{\sin^2 r} = a \cos 2\omega.$$

L'équation générale de la circonférence d'un grand cercle est, dans le même système de coordonnées,

$$\cot r = \mathrm{A} \cos(\omega - \alpha),$$

ou

$$\frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} r}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} r} = \mathrm{A} \cos(\omega - \alpha).$$

En y substituant $\sqrt{-1}\ \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} r$ pour $\operatorname{tang} \frac{1}{2} r$, cette équation devient

$$\frac{1 + \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} r}{2\sqrt{-1}\ \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} r} = \mathrm{A} \cos(2\omega - \alpha),$$

où l'on a remplacé aussi ω par 2ω. Or,

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} r = \frac{1 - \cos r}{1 + \cos r};$$

et, conséquemment,

$$\frac{(1 - \cos r)^2 + (1 + \cos r)^2}{2\sqrt{-1}\,(1 + \cos r)(1 - \cos r)} = \mathrm{A} \cos(2\omega - \alpha),$$

ou

$$\frac{1 + \cos^2 r}{\sin^2 r} = \mathrm{A}\sqrt{-1} \cos(2\omega - \alpha).$$

Mettant a pour $\mathrm{A}\sqrt{-1}$, et supposant nulle la constante α, on retombe sur l'équation de l'hyperbole équilatère sphérique, ainsi qu'il était proposé de le vérifier.