DIEU

Note sur un problème d'application de l'analyse à la géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 259-264

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__259_1>

NOTE SUR UN PROBLÈME D'APPLICATION DE L'ANALYSE A LA GÉOMÉTRIE ;

PAR M. DIEU.

On demande souvent de déterminer le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les tangentes à une courbe, et même, il y a quelques années, on proposait des cas particuliers assez compliqués dans les examens pour l'École Polytechnique ; cette question conduit à une autre qui en est une sorte de réciproque, savoir : *Quelle est la courbe telle, que le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les tangentes soit une courbe donnée?*

On peut résoudre ce problème de deux manières, soit en n'employant que les principes du calcul différentiel (dérivées), soit en faisant usage de ceux du calcul intégral.

1°. Soient A la courbe donnée et P le point donné. Tirons PM de P à un point quelconque M de la courbe A, et élevons à PM, par le point M, une perpendiculaire L ; on peut considérer L comme une droite qui se déplace sur le plan, en même temps que M glisse sur la courbe A, avec les deux conditions de passer toujours en M et d'être perpendiculaire à PM ; or, on voit facilement ainsi que la courbe cherchée X est l'enveloppe de la droite L.

Il résulte de ce raisonnement que, si l'on est parvenu à la courbe A en résolvant le problème d'abord cité, par rapport à une certaine courbe B et au point P, la solution du problème inverse sera la courbe B; car un même système de droites ne saurait avoir deux enveloppes différentes. Par exemple, lorsque A est une droite, X sera une parabole que cette droite touchera en son sommet, et le point P sera le foyer. Lorsque A est une circonférence, X sera une conique concentrique à cette circonférence, dont le point P sera un des foyers et dont l'axe focal sera égal au diamètre de la circonférence (ellipse, si P est intérieur à la circonférence A; hyperbole, si P est extérieur).

2°. Soient encore

$$(1) \qquad f(\xi, \eta) = 0$$

l'équation de A; α, β les coordonnées de P, et x, y celles du point de la courbe demandée X correspondant au point (ξ, η) de A.

ξ, η, x, y et $y' = \frac{dy}{dx}$ doivent satisfaire respectivement à l'équation (1) ainsi qu'aux équations

$$(2) \qquad \eta - y - y'(\xi - x) = 0, \quad y'(\eta - \beta) + \xi - \alpha = 0,$$

qui, en regardant ξ, η comme des coordonnées courantes, représentent la tangente menée à X au point (x, y), et la perpendiculaire abaissée de P sur cette tangente. Donc la courbe X doit satisfaire à l'équation différentielle du premier ordre

$$(3) \qquad \varphi(x, y, y') = 0,$$

que l'on obtiendra par l'élimination de ξ, η entre les trois précédentes, et cette courbe n'est d'ailleurs analytiquement astreinte qu'à cette seule condition.

Lorsqu'on aura été conduit à l'équation (1) par le problème direct, dont l'énoncé a d'abord été rappelé, par rapport au point P et à une certaine courbe B, l'équation de cette courbe sera toujours une solution singulière de l'équation (3), et l'intégrale générale sera l'équation des tangentes dans laquelle il n'entre d'autre paramètre arbitraire que le coefficient angulaire. En effet, ces deux équations doivent satisfaire à l'équation (3), car la courbe B et ses tangentes possèdent la propriété géométrique que l'équation (3) exprime, et l'équation des tangentes, qui contient une arbitraire (le coefficient angulaire), est l'intégrale générale, tandis que l'équation de B, qui ne contient pas d'arbitraire et ne peut se déduire de celle des tangentes, en attribuant une valeur particulière au coefficient angulaire, est une solution particulière.

Enfin, même quand l'équation (1) est donnée à priori, il résulte des principes connus qu'il y a des lignes dont l'équation est l'intégrale générale de l'équation (3). Or, si ces lignes étaient des courbes, l'équation des tangentes, dans laquelle se trouverait nécessairement la même arbitraire que dans l'équation de ces courbes, outre le coefficient angulaire qui est tout à fait indépendant de cet arbitraire, satisferait aussi à l'équation (3); mais cela est absurde, car l'équation la plus générale qui puisse satisfaire à une équation différentielle du premier ordre ne doit contenir qu'une seule arbitraire; donc *l'intégrale générale de l'équation* (3) *sera toujours de la forme*

$$(4)\qquad y = \lambda x + \psi(\lambda),$$

$\psi(\lambda)$ *étant une fonction qui dépendra de la nature de* A, *et l'on aura l'équation de* X *par l'élimination de* λ *entre cette équation et*

$$x + \psi'(\lambda) = 0,$$

d'après la théorie des solutions singulières.

APPLICATIONS.

I. La ligne A est une droite. En prenant cette droite pour axe des y et la perpendiculaire abaissée du point P pour axe des x, on trouve facilement que l'équation (3) est, dans ce cas,

$$xy'^2 - yy' + \alpha = 0.$$

Si l'on pose

$$y = \lambda x + \mu, \quad \text{d'où} \quad y' = \lambda,$$

il vient, en substituant,

$$\mu\lambda - \alpha = 0, \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{\alpha}{\lambda}:$$

par conséquent, l'intégrale générale est

$$y = \lambda x + \frac{\alpha}{\lambda},$$

et l'élimination de λ entre cette équation et $x - \frac{\alpha}{\lambda^2} = 0$ donne

$$y^2 = 4\alpha x.$$

II. La courbe A est une circonférence. En prenant pour axe des x la droite menée du centre au point P, et pour axe des y la perpendiculaire élevée à cette droite par le centre, l'équation (3) est

$$(x^2 - R^2)\, y'^2 - 2\, xyy' + y^2 - R^2 + \alpha^2 = 0,$$

R désignant le rayon de la circonférence. Si l'on pose, de même que ci-dessus,

$$y = \lambda x + \mu,$$

il vient, en substituant puis en résolvant par rapport à μ,

$$\mu = \pm\sqrt{R^2\lambda^2 + R^2 - \alpha^2},$$

de sorte que l'intégrale générale est

$$y = \lambda x \pm \sqrt{R^2\lambda^2 + R^2 - \alpha^2};$$

et l'élimination de λ entre cette équation et

$$x \pm \frac{R^2\lambda}{\sqrt{R^2\lambda^2 + R^2 - \alpha^2}} = 0,$$

donne

$$R^2y^2 + (R^2 - \alpha^2)x^2 = R^2(R^2 - \alpha^2).$$

III. La courbe A est une parabole dont le point P est le sommet. En prenant pour axes des x et des y l'axe de la parabole et la tangente au sommet, il faut éliminer ξ, η entre les équations

$$\eta^2 - 2p\xi = 0, \quad \eta - y'\xi = y - xy', \quad y'\eta + \xi = 0,$$

pour avoir l'équation (3) qui est

$$2py'^3 + (2p - x)y' + y = 0.$$

On obtient facilement l'intégrale générale de cette équation, savoir

$$y = \lambda x - 2p\lambda(1 + \lambda^2),$$

et la solution singulière

$$y = \frac{2}{3\sqrt{6p}}(x - 2p)^{\frac{3}{2}},$$

soit de la manière indiquée pour les exemples précédents, soit par le procédé de la différentiation (l'équation dont il s'agit rentre dans le type connu sous le nom d'*équation de Clairaut*).

Pour la développée de la parabole dont le paramètre est double de celui de la parabole A et qui a le même sommet, ainsi que le même axe, on trouve

$$Y = \frac{2}{3\sqrt{3p}}(X - 2p)^{\frac{3}{2}};$$

donc, pour $x = X$, on a

$$\frac{y}{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

cette relation fait parfaitement connaître la forme de X.

Nota. Ces applications peuvent se faire tout aussi simplement par la première marche qui a été indiquée et qui n'exige que la connaissance des premiers principes du calcul différentiel; mais il n'en est pas toujours ainsi.