NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Rapport du diamètre à la circonférence, d'après Ptolémée

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 253-255

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__253_1>

RAPPORT DU DIAMÈTRE A LA CIRCONFÉRENCE, D'APRÈS PTOLÉMÉE.

Ptolémée divise la circonférence en 360 degrés, chaque degré en 60 minutes, etc. Il divise de même le rayon égal à l'unité en 60 parties égales; chacune de ces parties en 60 nommées aussi minutes, etc., et il trouve que la corde de l'arc d'un degré est égale à $\frac{1}{60}+\frac{2}{60^2}+\frac{50}{60^3}$ du rayon, ou $1^\circ\ 2'\ 50''$, et si nous admettons que cet arc ne diffère pas sensiblement de sa corde, l'arc de 60 degrés a donc pour longueur $1+\frac{2}{60}+\frac{50}{60^2}$ du rayon, ou bien $1^\circ\ 2'50''$ du rayon. Donc la demi-circonférence de rayon 1 ou bien la circonférence entière de diamètre 1 est

$$3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60^2} \quad \text{ou} \quad 3,8^\circ,30',$$

ou bien

$$3\,\frac{17}{120}=3,141\,666\ldots$$

tel est le π de Ptolémée,

$$3\,\frac{17}{120}=\frac{377}{120}=\frac{355+22}{113+7}.$$

On obtient donc le rapport de Ptolémée en ajoutant terme à terme le rapport d'Archimède à celui d'Adrien Metius : le rapport de Ptolémée est compris entre eux.

Mais Ptolémée ne s'occupe pas de π; son but est de calculer une Table des cordes qu'il donne, en procédant par demi-degré, depuis 30 minutes jusqu'à 180 degrés; il y ajoute une Table des trentièmes des différences successives entre les cordes. A cet effet, il calcule d'abord, par la construction connue, les côtés du décagone et du pentagone :

$$\text{corde de } 36^\circ = 37'\,4''\,55''',$$
$$\text{corde de } 72^\circ = 110^\circ\,32'\,0''\,56''';$$

puis il établit le théorème connu sur la relation entre les diagonales et les côtés du quadrilatère inscrit, et part de ce théorème pour trouver d'abord la corde de la différence, et ensuite la corde de la somme des deux arcs dont on connaît les cordes respectives et aussi pour calculer la corde de la moitié d'un arc. Ainsi, au moyen de la corde de 72 et de 60 degrés, il trouve la corde 12 degrés, et, de là, par des bissections successives, il parvient à trouver

$$\text{corde } 1^\circ\,30' = 1^\circ\,34'\,15'',$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{15}{60^3}\right) \text{rayon};$$

puis il démontre que, lorsque l'arc b est plus grand que l'arc a, on a l'inégalité

$$\frac{\text{corde } b}{\text{corde } a} < \frac{b}{a},$$

et il a besoin de ce théorème pour trouver par approximation la corde de 30 minutes ou $\frac{1}{2}$ degré; il procède ainsi :

$$\text{la corde de } 45' = \frac{1}{2} \text{ corde } 1^\circ\,30' = \text{corde } \frac{3}{4} \text{ de degré} = 0^\circ\,47'\,8''.$$

Or

$$\frac{\text{corde } \frac{3^\circ}{2}}{\text{corde } 1^\circ} < \frac{3}{2}; \qquad \frac{\text{corde } 1^\circ}{\text{corde } \frac{3^\circ}{4}} < \frac{4}{3};$$

donc

$$\text{corde de } 1^\circ < \frac{4}{3} \text{corde } \frac{3^\circ}{4},$$

$$\text{corde de } 1^\circ > \frac{2}{3} \text{corde } \frac{3}{2};$$

ces deux limites étant égales jusqu'aux secondes, on a sensiblement

$$\text{corde } 1^\circ = 1^\circ 2' 50'' = \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{50}{60^3}\right) \text{rayon}.$$

Connaissant la corde de 1 degré, il calcule celle de 30 minutes, et ensuite la Table des cordes qui procède par 30 minutes.

(*Composition mathématique de* Claude Ptolémée. Traduction de Halma, t. I, liv. 1, p. 36.)