NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. TARDY

Solution de la question 141

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 13 (1854), p. 23-25

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1854_1_13__23_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 141

(voir t. VI, p. 134);

PAR M. P. TARDY.

Soient A_r, $A_{r+1}, \ldots$, A_{r+2} trois termes consécutifs d'une série récurrente. Si l'on forme la série qui a pour terme général $A_r A_{r+2} - A_{r+1}^2$, elle est aussi récurrente.

Fourier a énoncé ce théorème dans son *Analyse des* *équations déterminées*, page 72. Son objet était de trouver successivement toutes les racines d'une équation par l'emploi des séries récurrentes, en donnant ainsi une grande extension à la méthode découverte par D. Bernoulli pour obtenir la plus grande racine réelle.

Il paraît que quelque erreur s'est glissée dans ce qu'avance à ce propos le célèbre géomètre; mais nous nous bornerons, pour le moment, à démontrer la proposition spéciale rappelée dans ces *Annales*.

Il est aisé de voir que toute série dont le terme général est de la forme

$$\frac{D_1}{a_1^{r+1}} + \frac{D_2}{a_2^{r+1}} + \ldots + \frac{D_n}{a_n^{r+1}},$$

$D_1, D_2, \ldots, D_n$ désignant des constantes arbitraires, est une série récurrente où l'on a fait la variable pour laquelle la série est ordonnée $=1$. Pour avoir la fraction génératrice $\frac{F(x)}{f(x)}$, il suffit de poser

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n),$$
$$F(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

et de déterminer les n quantités b_0, b_1, $b_2, \ldots, b_{n-1}$ par les n équations

$$b_0 + b_1 a_1 + b_2 a_1^2 + \ldots + b_{n-1} a_1^{n-1} = -D_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n),$$
$$b_0 + b_1 a_2 + b_2 a_2^2 + \ldots + b_{n-1} a_2^{n-1} = -D_2 (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_0 + b_1 a_n + b_2 a_n^2 + \ldots + b_{n-1} a_n^{n-1} = -D_n (a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}).$$

En effet, nous savons que le terme général de la série récurrente qui provient de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ est

$$-x^r \sum_{p=1}^{p=n} \frac{F(a_p)}{f'(a_p)\, a_p^{r+1}}.$$

Maintenant, supposons que A_r soit le terme général d'une série récurrente, et que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ soient les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le dénominateur de sa fraction génératrice; on aura

$$A_r = \frac{\beta_1}{\lambda_1^{r+1}} + \frac{\beta_2}{\lambda_2^{r+1}} + \ldots + \frac{\beta_n}{\lambda_n^{r+1}}.$$

En changeant r en $r+k$ et en $r+k'$, et en multipliant, il viendra

$$A_{r+k} \cdot A_{r+k'} = \sum_{p=n}^{p=1} \sum_{q=n}^{q=1} \frac{\beta_p \beta_q}{\lambda_p^k \lambda_q^{k'}} \cdot \frac{1}{(\lambda_p \lambda_q)_{r+1}}.$$

Et si l'on prend $h+h'=k+k'$, on aura, en retranchant, un résultat de la forme

$$L = A_{r+k}.A_{r+k'} - A_{r+h}.A_{r+h'} = B_{1,2} \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2)^{r+1}} + B_{1,3} \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_3)^{r+1}} + \ldots$$
$$+ B_{n-1,n} \frac{1}{(\lambda_{n-1} \lambda_n)^{r+1}};$$

et l'on voit que L est le terme général d'une série récurrente qui naît de la fraction

$$\frac{\varphi(x)}{(x - \lambda_1 \lambda_2)(x - \lambda_1 \lambda_3) \ldots (x - \lambda_{n-1} \lambda_n)},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme d'un degré $= \frac{n(n-1)}{1.2} - 1$.

Prenant $k=0$, $k'=2$, $h=h'=1$, on aura le théorème particulier dont il était question.