Nouvelles annales de mathématiques

E. Prouhet

Sur un problème de combinaisons

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 85-90

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__85_0>

SUR UN PROBLÈME DE COMBINAISONS;

PAR M. E. PROUHET.

I.

La question que je me propose de résoudre est la suivante : *Combien y a-t-il de manières de résoudre m équations à m inconnues, en variant autant que possible l'ordre des éliminations et des substitutions ?*

Soient R_m le nombre cherché et E_n le nombre des manières d'éliminer une inconnue entre n équations.

L'ordre dans lequel on dispose les m inconnues, pour chasser successivement les $m-1$ premières, peut être varié de $1.2.3,\ldots, m$ ou de P_m manières, ce qui fait d'abord P_m modes de résolution distincts.

Mais la première, la seconde, la $n^{\text{ième}}$ inconnue peuvent être éliminées respectivement de E_m, de E_{m-1}, de E_n manières. Le nombre des modes déjà trouvés doit donc être multiplié par le produit $E_m E_{m-1},\ldots, E_3 E_2$.

Ensuite, quand on aura trouvé $n-1$ inconnues, il y aura n manières d'en obtenir une $n^{\text{ième}}$ en résolvant une quelconque des n équations qui renferment cette inconnue avec les $n-1$ premières. Il y aura donc deux manières d'obtenir la deuxième inconnue, trois manières d'obtenir la troisième, etc., ce qui multiplie encore par P_m le nombre des modes déjà trouvés.

De sorte que nous aurons, en définitive,

$$R_m = P_m^2 E_m E_{m-1} \ldots, E_3 E_2.$$

II.

Il s'agit maintenant de trouver E_m, E_{m-1}, etc., ou simplement E_m, c'est-à-dire de résoudre ce problème : *Com-*

bien y a-t-il de manières d'éliminer une inconnue entre m équations?

Désignons ces équations par les nombres 1, 2, 3,..., m. Pour en chasser une inconnue x, il faut éliminer $m-1$ fois x entre deux de ces équations, en ayant soin d'employer chaque équation au moins une fois. D'après cela, si l'on forme les $\frac{m(m-1)}{2}$ combinaisons deux à deux des m premiers nombres, savoir :

$$\begin{array}{l}
(1, 2) \\
(1, 3)\ (2, 3) \\
(1, 4)\ (2, 4)\ (3, 4) \\
(1, 5)\ (2, 5)\ (3, 5) \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
(1, m)\ (2, m)\ (3, m), \dots, (m-1)\, m,
\end{array}$$

les différents modes d'élimination que l'on pourra employer correspondront aux combinaisons $m-1$ à $m-1$ des termes de ce tableau, en excluant celles où manqueraient quelques-uns des nombres 1, 2,..., m.

Pour abréger le discours, nous réserverons le nom de *groupe* aux combinaisons dont nous venons de parler.

III.

Le nombre total des groupes possibles est

$$C_{m-1}^{T_m},$$

l'indice inférieur désignant le nombre des couples qui entrent dans chaque combinaison, et l'indice supérieur T_m servant à représenter le nombre triangulaire $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

T_{m-2} étant le nombre triangulaire égal ou immédiatement supérieur à $m - 1$, il ne pourra manquer dans aucun groupe plus de z nombres; car si l'on ôte du tableau qui renferme tous les couples les $z + 1$ premières colonnes, les T_{m-z-1} couples restants ne peuvent former de groupes, puisqu'on a, par hypothèse,

$$T_{m-z-1} < m - 1.$$

On aura donc

$$C_{m-1}^{T_m} = X_0 + X_1 + X_2 + \ldots + X_z,$$

X_0 désignant le nombre des groupes où ne manque aucun nombre, X_1 le nombre de ceux où il en manque un seulement, X_2 le nombre de ceux où il en manque deux, et ainsi de suite.

IV.

On peut déterminer d'abord X_z. Si sur les T_m couples on laisse ceux qui contiennent z nombres pris à volonté, les T_{m-z} autres couples fourniront $C_{m-1}^{T_{m-z}}$ groupes où n'entrent pas les z nombres considérés. La même opération pouvant se répéter autant de fois qu'il y a de manières de prendre z choses sur m, on aura

$$X_z = C_z^m \, C_{m-1}^{T_{m-z}}.$$

Tous les X seront donc connus si l'on parvient à établir une relation entre X_i et X_{i+1}, X_{i+2}, etc.

V.

A cet effet, considérons i nombres sur m, par exemple

$$1, 2, 3, \ldots, i;$$

les groupes où n'entrent pas ces nombres s'obtiendront en combinant $m - 1$ à $m - 1$ les T_{m-i} couples où ces nombres manquent. La même chose ayant lieu pour chaque manière de prendre i nombres sur m, on voit qu'en prenant

$$C_i^m C_{m-i}^{T_{m-i}},$$

on sera sûr de compter, et chacun une seule fois, les groupes où n'entrent pas i des m nombres; mais il faut en retrancher les groupes où manquent plus de i nombres.

Or, tout groupe où manquent $i+1$ nombres, par exemple

$$1, 2, 3, \ldots, i, i+1,$$

fait partie des groupes où manquent i de ces nombres, et est compté $i+1$ fois. Il faut donc d'abord déduire du nombre précédent $(i+1)\,X_{i+1}$.

Un groupe où manquent $i+2$ nombres, par exemple

$$1, 2, 3, \ldots, i, i+1, i+2,$$

fait partie des groupes où manquent i de ces nombres, et est ainsi répété $\frac{(i+1)(i+2)}{1.2}$ fois. On aura donc à déduire, pour les groupes de cette classe, $\frac{(i+1)(i+2)}{1.2}X_{i+2}$.

On verrait de même qu'il faut déduire, à cause des groupes où manquent $i+3$ nombres, le nombre $\frac{(i+1)(i+2)(i+3)}{1.2\,3}X_{i+3}$, et ainsi de suite. On aura donc

$$X_i = C_i^m C_{m-i}^{T_{m-i}} - \frac{i+1}{1}X_{i+1} - \frac{(i+1)(i+2)}{1.2}X_{i+2}$$
$$- \frac{(i+1)(i+2)(i+3)}{1\,2.3}X_{i+3} - \ldots$$

VI.

Si l'on fait successivement, dans cette formule, $i = z-1$, $z-2$, $z-3$, on trouve, toutes réductions faites,

$$X_{z-1} = C^m_{z-1}\, C_{m-1}^{T_{m-z+1}} - \frac{z}{1} C^m_z\, C_{m-1}^{T_{m-z}},$$

$$X_{z-2} = C^m_{z-2}\, C_{m-1}^{T_{m-z+2}} - \frac{(z-1)}{1} C^m_{z-1}\, C_{m-1}^{T_{m-z+1}}$$
$$+ \frac{(z-1)z}{1.2} C^m_z\, C_{m-1}^{T_{m-z}},$$

$$X_{z-3} = C^m_{z-3}\, C_{m-1}^{T_{m-z+3}} - \frac{z-2}{1} C^m_{z-2}\, C_{m-1}^{T_{m-z+2}}$$
$$+ \frac{(z-2)(z-1)}{1.2} C^m_{z-1}\, C_{m-1}^{T_{m-z+1}} - \frac{(z-2)(z-1)z}{1.2.3} C_z\, C_{m-1}^{T_{m-z}},$$

formules dont la loi est évidente et qui donnent, par induction,

$$X_n = C^m_n\, C_{m-1}^{T_{m-n}} - \frac{n+1}{1} C^m_{n-1}\, C_{m-1}^{T_{m-n-1}}$$
$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} C^m_{n-1}\, C_{m-2}^{T_{m-n-2}} - \ldots;$$

et, si l'on fait $n = 0$,

$$X_0 = C_{m-1}^{T_m} - C^m_1\, C_{m-1}^{T_{m-1}} + C^m_2\, C_{m-1}^{T_{m-2}} - C^m_3\, C_{m-1}^{T_{m-3}} + \ldots.$$

Mais X_0 n'est autre chose que ce que nous avons désigné en commençant par E_m. Donc notre problème est résolu.

Comme vérification, on s'assurerait facilement, d'après les formules précédentes, que la somme des nombres X_0, $X_1, X_2, \ldots, X_z$ est égale à $C_{m-1}^{T_m}$.

VII.

Le nombre R_m croît très-rapidement avec son indice, comme on en jugera par le tableau suivant :

$E_2 = 1$, $R_2 = 4$.
$E_3 = 3$, $R_3 = 108$,
$E_4 = 16$, $R_4 = 27648$,
$E_5 = 135$, $R_5 = 122112000$.

Nous remarquerons, en terminant, que quelques-unes de nos formules peuvent servir à résoudre des problèmes relatifs à la géométrie de situation. Ainsi X_0, $\frac{X_1}{m}$, $\frac{1.2.X_2}{m(m-1)}$, indiquent respectivement le nombre de manières de mener $m-1$ droites entre m, $m-1$, $m-2$, etc., points, de telle sorte qu'aucun de ces points ne soit isolé.