NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Note sur les rayons et cercles de courbure ; d'après M. Schellbach

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 390-393

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__390_1>

NOTE SUR LES RAYONS ET CERCLES DE COURBURE;

D'APRÈS M. SCHELLBACH.

(Journal de M. Crelle, t. XLV, p. 263; 1853.)

Coordonnées rectangulaires.

1. *Lemme.* Soient

$$x,\ y,\ z;\quad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2$$

les coordonnées rectangulaires de trois points donnés dans l'espace; x', y', z' les coordonnées courantes d'un plan passant par ces trois points.

L'équation du plan est

$$(x'-x_1)[\Delta y\,\Delta^2 z-\Delta z\,\Delta^2 y]+(y'-y_1)[\Delta z\,\Delta^2 x-\Delta x\,\Delta^2 z]$$
$$+(z'-z_1)[\Delta x\,\Delta^2 y-\Delta y\,\Delta^2 x]=0,$$

ou

$$\Delta x=x_1-x,\quad \Delta x_1=x_2-x_1,\quad \Delta^2 x=\Delta x_1-\Delta x.$$

De même pour y et z.

2. PROBLÈME. *Mêmes données. Trouver l'équation du cercle passant par les trois points.*

Solution. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre;

ρ le rayon. Posons

$$\xi - x_1 = u, \quad \eta - y_1 = v, \quad \zeta - z_1 = w.$$

On a évidemment les quatre équations

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} u[\Delta y\, \Delta^2 z - \Delta z\, \Delta^2 y] + v[\Delta z\, \Delta_2 x - \Delta x\, \Delta^2 z] \\ + w[\Delta x\, \Delta^2 y - \Delta y\, \Delta^2 x] = 0, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad (u + \Delta x)^2 + (v + \Delta y)^2 + (w + \Delta z)^2 = \rho^2,$$

$$(3) \quad u^2 + v^2 + w^2 = \rho^2,$$

$$(4) \quad (u - \Delta x_1)^2 + (v - \Delta y_1)^2 + (w - \Delta z_1)^2 = \rho^2.$$

Désignons par Δs la distance du premier point au second, par Δs_1 la distance du second au troisième, et supposons les deux distances égales, de sorte que le triangle est isocèle; on a donc

$$(5) \quad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2 + (\Delta z_1)^2 = (\Delta s)^2 = (\Delta s_1)^2,$$

or

$$(\Delta x_1)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta x_1 - \Delta x)(\Delta x_1 + \Delta x) = \Delta^2 x\,(2\,\Delta x + \Delta^2 x).$$

De même pour y, etc.; donc

$$(6) \quad 2[\Delta x\, \Delta^2 x + \Delta y\, \Delta^2 y + \Delta z\, \Delta^2 z] + (\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2 = 0.$$

Retranchant successivement l'équation (3) de l'équation (2) et de l'équation (4), on obtiendra

$$(7) \quad 2(u\,\Delta x + v\,\Delta y + w\,\Delta z) + (\Delta s)^2 = 0,$$

$$(8) \quad 2(u\,\Delta x_1 + v\,\Delta y_1 + w\,\Delta z_1) - (\Delta s_1)^2 = 0;$$

d'où

$$(9) \quad u\,\Delta^2 x + v\,\Delta^2 y + w\,\Delta^2 z = (\Delta s)^2.$$

On satisfait à l'équation (1) en posant

$$u = \lambda\,\Delta^2 x, \quad v = \lambda\,\Delta^2 y, \quad w = \lambda\,\Delta^2 z,$$

où λ est indéterminé.

Substituant ces valeurs dans l'équation (9) et dans l'équation (3), on a

$$(10) \qquad \lambda[(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2] = [\Delta s]^2,$$

$$(11) \qquad \lambda^2[(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2] = \rho^2,$$

et de là

$$\lambda = \frac{\rho^2}{(\Delta s)^2},$$

et de là enfin

$$\xi - x_1 = \rho^2 \frac{\Delta^2 x}{(\Delta s)^2}, \quad \eta - y_1 = \rho^2 \frac{\Delta^2 y}{(\Delta s)^2}, \quad \zeta - z_1 = \rho^2 \frac{\Delta^2 z}{(\Delta s)^2},$$

$$\rho = \pm \frac{(\Delta s)^2}{\sqrt{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2}},$$

équations aux *différences* de même forme que celles qu'on obtient pour les *différentielles* relatives au cercle osculateur, et l'équation (1) pour un triangle quelconque est semblable à celle du plan osculateur et peut servir à l'établir.

Coordonnées polaires.

3. Soient A et A′ deux points consécutifs d'une courbe plane, OA, OA′ deux rayons vecteurs, OX l'axe polaire, MA, MA′ les deux rayons de courbure consécutifs, OB la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur la tangente en A, OB_1 la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en B_1; faisons

$$AO = r, \quad A'O = r + dr, \quad OB = p, \quad OB_1 = p + dp,$$

$$AA' = ds; \quad \text{angle } OA, OX = \varphi; \quad \text{angle } OA', OX = \varphi + d\varphi;$$

$$\text{angle } AB, OK = \omega; \quad \text{angle } A'B_1, OX = \omega + d\omega;$$

donc

$$\text{angle } AMA' = d\omega; \quad AB = \tau;$$

on a

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{\tau}, \quad \rho = \frac{ds}{d\omega} = \frac{rdr}{\tau d\omega} = \frac{rdr}{dp}.$$

$$\text{aire du triangle } OAA' = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} pds, \quad p = \frac{r^2 d\varphi}{ds};$$

d'où

(1) $$\rho = \frac{rdr}{d.\dfrac{r^2\,d\varphi}{ds}}.$$

4. *Exemple.* $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; équation de la lemniscate,

$$rr' = -a^2 \sin 2\varphi,$$

$$a^4 = r^2(r^2 + r'^2) = r^2 s'^2, \quad s' = \frac{a^2}{r};$$

dérivées prises par rapport à φ,

$$\rho = \frac{rdr}{d.\dfrac{r^2}{s'}} = \frac{a^2}{3r}.$$

5. Posons $\frac{1}{r} = u$; alors

$$s' = r^2 + r'^2 = \frac{u^2 + u'^2}{u^4},$$

$$\frac{d.\dfrac{r^2}{s'}}{d\varphi} = \frac{d.(u^2 + u'^2)^{-\frac{1}{2}}}{d\varphi} = -\frac{u'(u + u')}{(u^2 + u'^2)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

(2) $$\rho = \frac{u^2 s'^3}{u + u''}.$$