

**Note sur les rayons et cercles de courbure
; d'après M. Schellbach**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 12
(1853), p. 390-393

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__390_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES RAYONS ET CERCLES DE COURBURE;

D'APRÈS M. SCHELLBACH.

(Journal de M. Crelle, t. XLV, p. 263; 1853.)

Coordonnées rectangulaires.

1. *Lemme.* Soient

$$x, y, z; \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2$$

les coordonnées rectangulaires de trois points donnés dans l'espace; x', y', z' les coordonnées courantes d'un plan passant par ces trois points.

L'équation du plan est

$$(x' - x_1)[\Delta y \Delta^2 z - \Delta z \Delta^2 y] + (y' - y_1)[\Delta z \Delta^2 x - \Delta x \Delta^2 z] \\ + (z' - z_1)[\Delta x \Delta^2 y - \Delta y \Delta^2 x] = 0,$$

ou

$$\Delta x = x_1 - x, \quad \Delta x_1 = x_2 - x_1, \quad \Delta^2 x = \Delta x_1 - \Delta x.$$

De même pour y et z .

2. **PROBLÈME.** *Mêmes données. Trouver l'équation du cercle passant par les trois points.*

Solution. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre;

ρ le rayon. Posons

$$\xi - x_1 = u, \quad \eta - y_1 = v, \quad \zeta - z_1 = \omega.$$

On a évidemment les quatre équations

$$(1) \quad \begin{cases} u[\Delta y \Delta^2 z - \Delta z \Delta^2 y] + v[\Delta z \Delta_2 x - \Delta x \Delta^2 z] \\ + \omega[\Delta x \Delta^2 y - \Delta y \Delta^2 x] = 0, \end{cases}$$

$$(2) \quad (u + \Delta x)^2 + (v + \Delta y)^2 + (\omega + \Delta z)^2 = \rho^2,$$

$$(3) \quad u^2 + v^2 + \omega^2 = \rho^2,$$

$$(4) \quad (u - \Delta x_1)^2 + (v - \Delta y_1)^2 + (\omega - \Delta z_1)^2 = \rho^2.$$

Désignons par Δs la distance du premier point au second, par Δs_1 la distance du second au troisième, et supposons les deux distances égales, de sorte que le triangle est isocèle; on a donc

$$(5) \quad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta y_1)^2 + (\Delta z_1)^2 = (\Delta s)^2 = (\Delta s_1)^2,$$

or

$$(\Delta x_1)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta x_1 - \Delta x)(\Delta x_1 + \Delta x) = \Delta^2 x (2\Delta x + \Delta^2 x).$$

De même pour y , etc.; donc

$$(6) \quad 2[\Delta x \Delta^2 x + \Delta y \Delta^2 y + \Delta z \Delta^2 z] + (\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2 = 0.$$

Retranchant successivement l'équation (3) de l'équation (2) et de l'équation (4), on obtiendra

$$(7) \quad 2(u \Delta x + v \Delta y + \omega \Delta z) + (\Delta s)^2 = 0,$$

$$(8) \quad 2(u \Delta x_1 + v \Delta y_1 + \omega \Delta z_1) - (\Delta s_1)^2 = 0;$$

d'où

$$(9) \quad u \Delta^2 x + v \Delta^2 y + \omega \Delta^2 z = (\Delta s)'$$

On satisfait à l'équation (1) en posant

$$u = \lambda \Delta^2 x, \quad v = \lambda \Delta^2 y, \quad \omega = \lambda \Delta^2 z,$$

où λ est indéterminé.

Substituant ces valeurs dans l'équation (9) et dans l'é-

quation (3), on a

$$(10) \quad \lambda [(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2] = [\Delta s]^2,$$

$$(11) \quad \lambda^2 [(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2] = \rho^2,$$

et de là

$$\lambda = \frac{\rho^2}{(\Delta s)^2},$$

et de là enfin

$$\xi - x_1 = \rho^2 \frac{\Delta^2 x}{(\Delta s)^2}, \quad \eta - y_1 = \rho^2 \frac{\Delta^2 y}{(\Delta s)^2}, \quad \zeta - z_1 = \rho^2 \frac{\Delta^2 z}{(\Delta s)^2},$$

$$\rho = \pm \frac{(\Delta s)^2}{\sqrt{(\Delta^2 x)^2 + (\Delta^2 y)^2 + (\Delta^2 z)^2}},$$

équations aux *différences* de même forme que celles qu'on obtient pour les *différentielles* relatives au cercle osculateur, et l'équation (1) pour un triangle quelconque est semblable à celle du plan osculateur et peut servir à l'établir.

Coordonnées polaires.

3. Soient A et A' deux points consécutifs d'une courbe plane, OA, OA' deux rayons vecteurs, OX l'axe polaire, MA, MA' les deux rayons de courbure consécutifs, OB la perpendiculaire abaissée de l'origine O sur la tangente en A, OB₁ la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en B₁; faisons

$$\begin{aligned} \text{AO} &= r, & \text{A'O} &= r + dr, & \text{OB} &= p, & \text{OB}_1 &= p + dp, \\ \text{AA}' &= ds; & \text{angle OA, OX} &= \varphi; & \text{angle OA', OX} &= \varphi + d\varphi; \\ & & \text{angle AB, OK} &= \omega; & \text{angle A'B}_1, \text{OX} &= \omega + d\omega; \end{aligned}$$

donc

$$\text{angle AMA}' = d\omega; \quad \text{AB} = \tau;$$

on a

$$\frac{ds}{dr} = \frac{r}{\tau}, \quad \rho = \frac{ds}{d\omega} = \frac{r dr}{\tau d\omega} = \frac{r dr}{dp}.$$

$$\text{aire du triangle OAA}' = \frac{1}{2} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} p ds, \quad p = \frac{r^2 d\varphi}{ds};$$

d'où

$$(1) \quad \rho = \frac{r dr}{d. \frac{r^2 d\varphi}{ds}}$$

4. *Exemple.* $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; équation de la lemniscate,

$$rr' = -a^2 \sin 2\varphi,$$

$$a^4 = r^2(r^2 + r'^2) = r^2 s'^2, \quad s' = \frac{a^2}{r};$$

dérivées prises par rapport à φ ,

$$\rho = \frac{r dr}{d. \frac{r^2}{s'}} = \frac{a^2}{3r}.$$

5. Posons $\frac{1}{r} = u$; alors

$$s' = r^2 + r'^2 = \frac{u^2 + u'^2}{u^4},$$

$$\frac{d. \frac{r^2}{s'}}{d\varphi} = \frac{d. (u^2 + u'^2)^{-\frac{1}{2}}}{d\varphi} = -\frac{u'(u + u')}{(u^2 + u'^2)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

$$(2) \quad \rho = \frac{u^2 s'^3}{u + u''}.$$