DIEU

Concours d'agrégation aux lycées, année 1845

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 373-390

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__373_0>

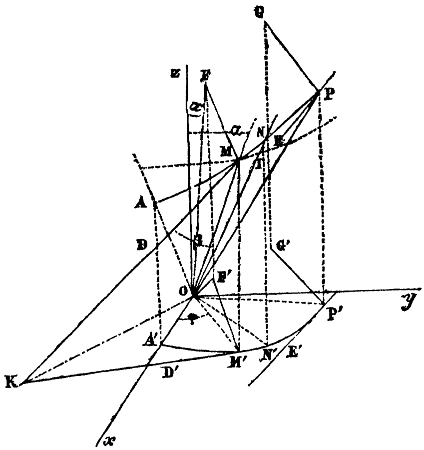
CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1845;

PAR M. DIEU,
Agrégé, docteur ès sciences.

COMPOSITION D'ANALYSE.

Déterminer la courbe qui coupe sous un angle constant les génératrices d'un cône de révolution, et qui passe par deux points A_0, A_1 *donnés sur ce cône. Longueur d'un arc. Aire de la portion de surface conique comprise entre un arc et les droites menées de ses extrémités au sommet du cône. Transformée plane. Plan osculateur. Rayon et centre de courbure. Lieu des centres de courbure.*

Nous désignerons la courbe dont il s'agit par le nom d'*hélice conique* (*voir* la note I, page 388).



1. Si un point m décrivait l'hélice en s'éloignant du sommet O du cône, à partir d'un point A de cette courbe,

un point m' qui décrirait simultanément la projection de l'hélice sur le plan perpendiculaire à l'axe du cône et passant par le sommet, en coïncidant toujours avec la projection de m sur ce plan, tournerait autour du sommet O dans un sens déterminé, facile à reconnaître d'après la position des points donnés A_0, A_1, et qui va nous servir à fixer le sens de nos notations.

Les axes rectangulaires, que nous emploierons concurremment avec des coordonnées polaires, seront : Ox, la direction de Om' quand m part du point A ; Oy, la direction que prend la ligne Om', de longueur variable, après avoir tourné de 90 degrés autour du point O; et Oz, l'axe du cône (on ne considère qu'une des nappes de cette surface).

De plus, soient :

φ l'angle, positif des Ox vers Oy et négatif dans le sens opposé, qui aura été décrit par Om' sur $\widehat{xy}$ lorsque m sera parvenu sur l'hélice au point quelconque M;

r la distance Om, et r' sa projection OM' sur $\widehat{xy}$;

$\varphi + d\varphi$, $r + dr$ et $r' + dr'$ ce que deviennent φ, r et r quand m a décrit encore un arc infiniment petit MN de l'hélice, en continuant de se mouvoir dans le même sens que de A en M;

ds l'arc MN considéré comme étant de même signe que φ et $d\varphi$;

β l'angle constant, que l'on peut supposer inférieur à 90 degrés, sous lequel l'hélice coupe les génératrices du cône;

α le demi-angle au sommet du cône.

La génératrice ON, en coupant le parallèle du cône qui passe par le point M, forme avec ce parallèle et avec l'hélice un *triangle conique* MIN, dont les côtés sont égaux à $\pm dr$, $\pm r' d\varphi$ et $\pm ds$, les signes supérieurs répondant à $\varphi > 0$, et les signes inférieurs à $\varphi < 0$; aux infiniment petits du second ordre près, ce triangle conique doit être considéré comme un triangle rectiligne, rectangle en I, et ayant en N un angle égal à β; donc on a

$$(1) \qquad dr = r' d\varphi . \cot \beta \quad \text{et} \quad dr = ds . \cos \beta.$$

Le triangle OM'M fournit d'ailleurs

$$r' = r \sin \alpha ;$$

et, par conséquent, la première des équations précédentes devient

$$(2) \qquad dr = r d\varphi . \sin \alpha \cot \beta ,$$

dont l'intégrale est

$$(3) \qquad r = C . e^{\varphi \sin \alpha \cot \beta},$$

e désignant la base des logarithmes népériens, et C une ligne qu'il faut déterminer ainsi que l'angle β, de manière que l'hélice passe par les points donnés A_0, A_1.

L'équation (3) suffit pour représenter l'hélice en coordonnées polaires, parce que le rayon vecteur r fait constamment avec Oz l'angle α, ce qui rend inutile l'introduction d'une troisième coordonnée.

Pour déterminer C et β, on a

$$r_0 = C e^{\varphi_0 \sin \alpha \cot \beta} \quad \text{et} \quad r_1 = C e^{\varphi_1 \sin \alpha \cot \beta},$$

en désignant par φ_0, r_0 et φ_1, r_1, les valeurs de φ et r qui répondent aux points A_0, A_1; et l'on déduit de ces équations

$$\text{tang } \beta = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{l r_1 - l r_0} . \sin \alpha, \qquad C = r_0^{\frac{\varphi_1}{\varphi_1 - \varphi_0}} . r_1^{-\frac{\varphi_0}{\varphi_1 - \varphi_0}}.$$

La première de ces formules ne fournit pour β une valeur inférieure à $\frac{\pi}{2}$, lorsque $r_1 > r_0$ (ce qu'on peut toujours admettre, puisque A_1 désigne celui des points donnés que l'on veut), que si $\varphi_1 > \varphi_0$; or, cela dépend du sens dans lequel φ est positif, et la condition $\varphi_1 > \varphi_0$, pour $r_1 > r_0$, détermine précisément ce sens de la manière convenue plus haut.

Nous conserverons les lettres β et C dans le reste du calcul, en supposant qu'elles représentent les valeurs déterminées par les formules qui précèdent.

L'équation polaire de la projection de l'hélice sur $\widehat{xy}$ (pôle O, axe Ox) s'obtient en substituant $\frac{r'}{\sin\alpha}$ à r dans l'équation (3), ce qui donne

$$(4) \qquad r' = C \sin\alpha . e^{\varphi \sin\alpha \cot\beta};$$

on voit donc que :

La projection de l'hélice conique sur tout plan perpendiculaire à l'axe du cône est une spirale logarithmique.

2. On peut arriver directement à la conclusion qui précède, former premièrement l'équation (4), et en déduire l'équation (3). Pour cela, soient :

P un point quelconque de l'hélice, différent de M;

P' la projection de P sur $\widehat{xy}$;

MD et PE les tangentes à l'hélice en M et P;

M'D' et P'E' les projections de ces tangentes sur $\widehat{xy}$.

Si l'on fait tourner le plan OPE autour de Oz, lorsque OP sera dans la direction de OM, ce plan coïncidera avec le plan OMD, puisqu'ils touchent tous deux le cône, l'un suivant OP, l'autre suivant OM; et, pourvu que le sens de la rotation soit convenable, PE sera alors parallèle à OM, car les angles OPE, OMD, devenus correspondants, sont égaux. Cela posé, concevons que les projections de OP et de PE suivent le mouvement de ces droites; OP' sera dans la direction de OM' en même temps que OP dans celle de OM, et P′E′ sera alors parallèle à M′D′, puisque PE est parallèle à MD, ainsi qu'il vient d'être dit; l'angle OP′E′ est donc égal à OM′D′, car le premier est devenu correspondant au second par l'effet seul de la rotation. Or ce raisonnement prouve bien que la projection de l'hélice conique sur $\widehat{xy}$ est une spirale logarithmique, puisque la propriété essentielle de ce genre de spirales est de couper tous les rayons vecteurs sous un angle constant.

Afin d'avoir la cotangente de l'angle OM′D′, qu'il faut connaître pour écrire l'équation de la spirale, il suffit de remarquer que MD et M′D′ se rencontrent en un point K de la trace du plan OMD sur $\widehat{xy}$, et que les triangles MOK, M′OK sont rectangles en O; en effet, il résulte de là que

$$\cot \mathrm{OM'D'} : \cot \mathrm{OMD}, \quad \text{ou} \quad \cot\beta :: r' : r, \quad \text{ou} \quad :: \sin\alpha : 1,$$

d'où

$$\cot \mathrm{OM'D'} = \sin\alpha \cot\beta.$$

D'après cela, la spirale peut être représentée par l'équation (4).

Lorsque l'on considère avec un peu de soin la rotation qui vient d'être indiquée, on voit que l'angle P′PE est égal à M′MD, car les côtés de ces angles deviennent parallèles chacun à chacun; ainsi :

L'hélice conique coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre parallèle à l'axe du cône qui la projette sur $\widehat{xy}$.

Le cosinus de l'angle constant, qui est M′MD pour le point M, s'obtient facilement; en effet, les triangles rectangles KM′M, OM′M et KOM donnent

$$\cos \mathrm{M'MD} = \frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{MK}}, \quad \mathrm{MM'} = r\cos\alpha \quad \text{et} \quad \mathrm{MK} = \frac{r}{\cos\beta},$$

d'où

$$\cos M'MD = \cos\alpha \cos\beta.$$

Cette propriété de l'hélice conique est très-remarquable; on verra plus loin comment on en déduit la direction du rayon de courbure et le plan osculateur.

3. *Longueur d'un arc.* b et b_1 étant les rayons vecteurs des extrémités d'un arc BB_1 de l'hélice, la seconde des équations (1) donne, en intégrant de $r = b$ jusqu'à $r = b_1$,

$$\text{arc } BB_1 = \frac{b_1 - b}{\cos\beta}, \tag{5}$$

si l'on suppose $b_1 > b$; donc *la longueur d'un arc quelconque de l'hélice conique est représentée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est la différence des rayons vecteurs des extrémités de cet arc, et dans lequel l'angle aigu adjacent à ce côté est égal à* β.

On pourrait aussi déduire la longueur de l'arc BB_1 de celle de l'arc $B'B'_1$ de spirale logarithmique, qui est la projection de BB_1 sur $\widehat{xy}$; car, en désignant par ds' l'élément $M'N'$ considéré comme de même signe que $d\varphi$, on a évidemment

$$ds = \frac{ds'}{\sin M'MD}$$

à un infiniment petit d'un ordre supérieur près, et puisque $M'MD$ est un angle constant,

$$\text{arc } BB_1 = \frac{\text{arc } B'B'_1}{\sin M'MD}.$$

4. *Aire du fuseau conique défini dans l'énoncé.* La surface du triangle conique MIN est infiniment petite par rapport à celle du fuseau MON, car MIN est moindre que le quadrilatère MINI' dont l'aire est exprimée par

$\left(r+\frac{dr}{2}\right) dr\, d\varphi \,.\, \sin\alpha$, tandis que MON surpasse MOI dont l'aire est exprimée par $\frac{1}{2}\, r^2\, d\varphi \,.\, \sin\alpha$. Si l'on désigne par du le fuseau MON considéré comme de même signe que φ, on a donc

$$(6) \qquad du = \frac{1}{2}\, r^2 d\varphi \,.\, \sin\alpha$$

à un infiniment petit d'un ordre supérieur près, et, en remplaçant $d\varphi$ par sa valeur tirée de l'équation (2), il vient

$$du = \frac{1}{2}\, r dr \,.\, \text{tang}\, \beta.$$

Or cette équation donne, en intégrant de $r = b$ jusqu'à $r = b_1$, et dans l'hypothèse que $b_1 > b$,

$$\text{fus. BOB}_1 = \frac{b_1^2 - b^2}{4} \,.\, \text{tang}\, \beta.$$

On pourrait encore déduire la valeur du fuseau BOB_1 de celle du secteur $\text{B}'\text{OB}'_1$ de la spirale logarithmique, car on voit facilement que fus. $\text{BOB}_1 = \frac{\text{sect. B}'\text{OB}'_1}{\sin\alpha}$.

5. *Transformée plane.* Le cône étant posé sur un plan fixe, de manière qu'il touche ce plan suivant une génératrice, si on le fait rouler sans glisser, le lieu des points du plan sur lesquels viennent successivement se mettre ceux de l'hélice conique est la transformée plane de cette courbe.

On voit sans peine qu'une tangente MD à l'hélice, entraînée dans le mouvement du cône, se confondra avec la tangente à la transformée au point μ correspondant à M, en même temps que OM se placera sur $O\mu$, et sans que l'angle OMD change de grandeur (le sommet O du cône ne se déplace pas sur le plan, parce qu'il n'y a pas de glissement); donc :

La transformée plane de l'hélice conique est une spirale logarithmique qui coupe ses rayons vecteurs sous l'angle β.

D'après cela, si O′ est la position du sommet du cône sur le plan, et O′A′ la droite sur laquelle se place la génératrice OA (1), en prenant O′ pour pôle, O′A′ pour axe polaire, et désignant par ψ l'angle A′O′μ considéré comme de même signe que φ, ce qui revient à poser $\varphi \sin \alpha = \psi$, l'équation de la transformée est

$$r = \mathrm{C}.e^{\psi.\cot\beta}.$$

6. *Plan osculateur.* Lorsque l'équation $\frac{dz}{ds} = \text{const.}$ est vérifiée pour tous les points d'une courbe, c'est-à-dire quand cette courbe coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre qui la projette sur $\widehat{xy}$; la formule connue $\cos \nu = \rho.\mathrm{D}_s \frac{dz}{ds}$ du cosinus de l'angle ν que le rayon vecteur ρ correspondant au point quelconque (x, y, z) de la courbe fait avec l'axe des z, donne

$$\cos \nu = 0, \quad \text{d'où} \quad \nu = \frac{\pi}{2}.$$

Donc, 1° *le rayon de courbure est parallèle à* $\widehat{xy}$, *et dirigé suivant la trace du plan normal dans lequel il est compris, sur le plan parallèle à* $\widehat{xy}$ *conduit par le point* (x, y, z), *de sorte qu'il est perpendiculaire au plan qui touche en ce point le cylindre projetant;* 2° comme le plan osculateur est, en général, déterminé par la tangente et par la direction du rayon de courbure, *le plan osculateur en* (x, y, z) *à une courbe qui remplit la condition exprimée par l'équation* $\frac{dz}{ds} = \text{const.}$, *est le plan con-*

duit suivant la tangente à cette courbe perpendiculairement au plan qui touche en (x, y, z) *le cylindre projetant.* Enfin, on voit encore sans difficulté que la trace du plan osculateur sur $\widehat{xy}$ est perpendiculaire à la projection de la tangente, et l'on conclut de là que l'inclinaison du premier plan sur le second est égale à l'inclinaison de la tangente sur celui-ci.

Or, en vertu de la remarque qui termine l'art. 2, tout ce que nous venons de dire s'applique à l'hélice conique, et fournit en descriptive une construction très-simple du plan osculateur, dont l'inclinaison constante sur $\widehat{xy}$, représentée par M′KM pour le point M, est d'ailleurs donnée par la formule $\sin \mathrm{M'KM} = \cos\alpha \cos\beta$, d'après la valeur qui a été obtenue pour $\cos \mathrm{M'MD}$ (2). On pourrait même arriver, par ces seules considérations, à l'équation du plan osculateur; mais, à cause d'une ambiguïté de signes assez difficile à écarter, il est préférable de suivre pour cela les principes généraux.

Les coordonnées rectangulaires du point M sont exprimées par $r \sin\alpha \cos\varphi$, $r \sin\alpha \sin\varphi$ et $r\cos\alpha$, de sorte que l'équation du plan osculateur est de la forme

$$\mathrm{A}(x - r\sin\alpha\cos\varphi) + \mathrm{B}(y - r\sin\alpha\sin\varphi) + z - r\cos\alpha = 0,$$

x, y, z désignant les coordonnées de ce plan, et A, B des fonctions inconnues de φ et r. Pour déterminer A et B, on doit différentier deux fois cette équation par rapport à φ et r, en regardant x, y, z comme des constantes, ce qui donne d'abord

$$\mathrm{A}(\sin\varphi - \sin\alpha\cot\beta\cos\varphi) - \mathrm{B}(\cos\varphi + \sin\alpha\cot\beta\sin\varphi) - \cos\alpha\cot\beta = 0,$$

après qu'on a remplacé $\frac{dr}{d\varphi}$ par sa valeur tirée de l'équation (2) et supprimé le facteur $r \sin\alpha$, puis

$$A(\cos\varphi + \sin\alpha\cot\beta\sin\varphi) + B(\sin\varphi - \sin\alpha\cot\beta\cos\varphi) = 0.$$

En tirant de ces deux équations les valeurs de A et B, et en substituant ces valeurs dans la précédente, on obtient

$$(\mathrm{O})\ \left\{\begin{aligned}&(\sin\varphi - \sin\alpha\cot\beta.\cos\varphi)\,x - (\cos\varphi + \sin\alpha\cot\beta.\sin\varphi)\,y\\ &\qquad + \frac{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\cos\alpha\sin\beta\cos\beta}\,.\,z = r\tang\beta.\end{aligned}\right.$$

Si l'on remarque que le coefficient angulaire $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ de la projection de la tangente en M sur $\widehat{xy}$ est

$$\tang(\varphi + \mathrm{OM'D'}) = -\frac{\cos\varphi + \sin\alpha\cot\beta.\sin\varphi}{\sin\varphi - \sin\alpha\cot\beta.\cos\varphi},$$

on vérifie sans peine, d'après l'équation (O), et par rapport à l'hélice conique, ce qui a été établi au début de cet article relativement au plan osculateur de toute courbe qui coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre projetant sur $\widehat{xy}$; on trouve aussi que le sinus de l'inclinaison du plan osculateur de l'hélice sur $\widehat{xy}$ est exprimé par $\cos\alpha.\cos\beta$; enfin, on peut remarquer que le z à l'origine est proportionnel au rayon vecteur r.

7. *Rayon de courbure.* Nous avons fixé d'une manière générale, au commencement de l'article qui précède, la direction du rayon de courbure des courbes qui satisfont à l'équation $\frac{dz}{ds} = \text{const.}$, et, par conséquent, celle du rayon de courbure de l'hélice conique; nous remarquerons seulement encore que la projection de ce rayon sur $\widehat{xy}$ tombe dans la direction de celui de la spirale logarithmique suivant laquelle l'hélice se projette sur ce plan.

Pour avoir la direction du rayon de courbure de l'hélice en un point M de cette courbe, dont la projection sur $\widehat{xy}$ est M', on mènera donc la normale en M' à la spirale logarithmique (*).

Afin de déterminer la grandeur du rayon de courbure, nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Les rayons de courbure de toute courbe qui satisfait à l'équation $\frac{dz}{ds} =$ const. *sont proportionnels à ceux de sa projection sur* $\widehat{xy}$.

En suivant toujours les notations qui ont été adoptées, une formule connue donne

$$\rho = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

car $\frac{d^2z}{ds^2} = 0$ d'après l'hypothèse ; et l'on a d'ailleurs

$$\rho' = \left[\left(\frac{d^2x}{ds'^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds'^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

et

$$ds' = kds,$$

si l'on désigne par ρ', ds' et k le rayon de courbure de la projection au point (x, y), l'élément correspondant ds' de cette courbe, et la valeur constante du cosinus de l'inclinaison sur $\widehat{xy}$ de la tangente en (x, y, z) à la courbe à double courbure. Or, en remplaçant ds' par kds dans l'expression de ρ', et en comparant le résultat avec l'expression de ρ, on a

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{1}{k^2},$$

C. Q. F. P.

(*) En descriptive, on obtient la direction de M'D' par la construction

[Nous avons cru devoir établir cette proposition avec toute l'étendue qu'elle comporte, comme nous l'avons fait pour celles qui précèdent et qui sont relatives au plan osculateur ainsi qu'au rayon de courbure.]

D'après cela, ρ représentant maintenant le rayon de courbure de l'hélice conique, on obtient de suite

$$(\rho) \qquad \rho = \frac{r \sin \alpha}{\sin \beta . \sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}};$$

car on a pour la spirale logarithmique,

$$\rho' = \frac{r'}{\sin \mathrm{OM'K}} \text{ (formule connue)},$$

et, d'autre part, $r' = r \sin \alpha$,

$$\sin \mathrm{OM'K} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \alpha \cot^2 \beta}} = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}},$$

enfin

$$k^2 = 1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \text{ (1 et 2)}.$$

Ainsi,

Le rapport $\frac{\rho}{r}$ du rayon de courbure au rayon vecteur de l'hélice conique est constant.

Mais, pour construire géométriquement le rayon de courbure en M, il convient de prendre

$$\rho = \frac{\mathrm{OM'} . \overline{\mathrm{MK}}^2}{\mathrm{OK} . \mathrm{M'K}},$$

qu'on déduit aussi de

$$\rho = \frac{\rho'}{k^2} \quad \text{et de} \quad \rho' = \frac{\mathrm{OM'}}{\sin \mathrm{OM'K}},$$

---

du point K : OK est perpendiculaire à OM', et l'on a sa longueur, en décrivant un triangle égal à OMK dans lequel on connaît le côté OM et l'angle adjacent OMK $= \beta$.

en remarquant que

$$\sin \mathrm{OM'K} = \frac{\mathrm{OK}}{\mathrm{M'K}} \quad \text{et} \quad k = \sin \mathrm{M'MK} = \frac{\mathrm{M'K}}{\mathrm{MK}}.$$

Les coordonnées du centre de courbure dépendent de l'équation (O) du plan osculateur, de l'équation du plan normal,

$$(\mathrm{N}) \left\{ \begin{array}{l} (\sin\varphi - \sin\alpha \cot\beta \cos\varphi)\, x \\ -(\cos\varphi + \sin\alpha \cot\beta \sin\varphi)\, y - \cos\alpha \cot\beta \,.\, z + r \cot\beta = 0, \end{array} \right.$$

et de

$$(\mathrm{N}') \left\{ \begin{array}{l} (\cos\varphi + \sin\alpha \cot\beta \sin\varphi)\, x \\ +(\sin\varphi - \sin\alpha \cot\beta \cos\varphi)\, y + r \sin\alpha \cot^2\beta = 0, \end{array} \right.$$

que l'on déduit de la précédente en la différentiant par rapport à φ et r, puis en remplaçant $\frac{dr}{d\varphi}$ par sa valeur tirée de l'équation (2). Les valeurs de x, y, z, qui satisfont à ces trois équations, sont assez compliquées, et il n'est pas nécessaire de les employer pour former l'expression du rayon de courbure : on voit en effet, avec un peu d'attention, que le plan (N') est perpendiculaire aux traces des deux autres plans sur $\widehat{xy}$, par conséquent, au rayon de courbure; et qu'ainsi ce rayon est la distance de M au plan (N'), ou de M' à la trace de ce plan sur $\widehat{xy}$, de sorte qu'on peut l'obtenir par la formule de la distance d'un point à une droite (en géométrie plane), en considérant seulement l'équation (N').

8. *Lieu des centres de courbure.* Soient F et G les centres de courbure qui répondent aux points M et P de l'hélice conique. Si l'on fait tourner autour de Oz, de la manière indiquée dans l'art. 2, la génératrice OP, le plan OPE qui touche le cône suivant OP, et le rayon de courbure PG; PG sera parallèle à MF lorsque le plan

OPE coïncidera avec OMD, qui touche le cône suivant OM, car PG reste perpendiculaire à OPE, et MF est perpendiculaire à OMD : ainsi l'angle OPG = OMF. Comme on a d'ailleurs (7) $\frac{\mathrm{PG}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{OM}}$, les triangles POG, MOF sont semblables ; de sorte que OG sera dirigé suivant OF, après la rotation, et que l'angle GOz = FOz, puisque GOz ne varie pas pendant que OG tourne autour de Oz. Donc *les points* F, G,..., *sont sur un cône de révolution, dont* Oz *est l'axe et* O *le sommet*. D'autre part, F′ étant la projection de F sur $\widehat{xy}$, l'angle en M′ du triangle F′OM′ est complémentaire de l'angle constant OM′D′, et le rapport $\frac{\mathrm{M'F'}}{\mathrm{MO}}$, ou $\frac{\rho}{r'}$, des côtés qui comprennent cet angle est aussi constant (7) ; par conséquent, il en est de même de l'angle F′OM′, ainsi que du rapport $\frac{\mathrm{OF'}}{\mathrm{OM'}}$, c'est-à-dire que cet angle et ce rapport ne varient pas avec la position du point M′ sur la spirale logarithmique. Donc, *le lieu des points* M′,..., *est une spirale semblable à la projection de l'hélice sur* $\widehat{xy}$. Or, il résulte évidemment de là, d'après ce qui a été dit dans les art. 1 et 2, que

Le lieu des centres de courbure de l'hélice conique est une autre hélice de même espèce, située sur un cône de même axe et de même sommet.

Si l'on désigne par γ et λ les angles M′ et O du triangle F′OM′, on a

$$\frac{\sin(\gamma + \lambda)}{\sin\lambda}, \quad \text{ou} \quad \cos\gamma + \sin\gamma\cot\lambda = \frac{r'}{\rho};$$

en remplaçant $\sin\gamma$ ainsi que $\cos\gamma$ par leurs valeurs tirées de $\tang\gamma = \sin\alpha\cot\beta$, et $\frac{r'}{\rho} = \frac{r\sin\alpha}{\rho}$ par sa valeur tirée de la formule (ρ), il vient

$$\tan g \lambda = -\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta}.$$

Nous supposerons, dans ce qui suit, que λ représente l'arc compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π qui est déterminé par cette formule.

Soient encore ψ et R' les coordonnées polaires du point F'. On a évidemment

$$\varphi = \psi - \lambda,$$

et le triangle $F'OM'$ donne

$$r' = R' \frac{\sin(\gamma + \lambda)}{\sin \gamma} = R'(\cos \lambda + \sin \lambda \cot \gamma),$$

ce qui devient

$$r' = R' \tan g \beta \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}},$$

après quelques réductions, en remplaçant $\sin \lambda$, $\cos \lambda$ par leurs valeurs tirées de celle de $\tan g \lambda$ et $\cot \gamma$ par $\frac{\tan g \beta}{\sin \alpha}$. Il n'y a plus maintenant qu'à porter ces valeurs de φ et r' dans l'équation (4) pour avoir l'équation polaire de la projection sur $\widehat{xy}$ du lieu des centres de courbure; on obtient ainsi

$$R' = C \frac{\sin \alpha}{\tan g \beta} \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}} \cdot e^{(\psi - \lambda) \sin \alpha \cot \beta}.$$

Enfin, α' étant le demi-angle au sommet du cône sur lequel se trouve le lieu des centres de courbure, β' l'angle constant sous lequel cette courbe coupe les génératrices de ce cône, et R le rayon vecteur du point F, on a

$$\tang \alpha' = \frac{R' \tang \alpha}{r'} = \frac{\tang \alpha}{\tang \beta}\sqrt{\frac{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta}{1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}},$$

$$\tang \beta' = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \tang \beta,$$

et

$$R = C \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} \cdot e^{(\psi - \lambda) \sin \alpha \cot \beta};$$

cette dernière équation est l'équation polaire (dans l'espace) du lieu des centres de courbure. Tout cela peut d'ailleurs être déduit des équations (O), (N) et (N').

Notes.

I. L'hélice conique, comme l'hélice dont on trouve la monographie dans les Traités de calcul différentiel, appartient à la classe fort remarquable des courbes qui coupent sous un angle constant les méridiennes d'une surface de révolution, et qu'on nomme, en général, des *loxodromies*.

Si l'on convient de désigner par r l'arc de méridienne OM compris entre le sommet O d'une surface de révolution quelconque, et le point M d'une loxodromie tracée sur cette surface, par r' la distance de M à l'axe Oz, qui est l'ordonnée de la méridienne en prenant Oz pour axe des abscisses, et de conserver le reste des notations expliquées dans l'art. 1, on voit immédiatement que les équations (1) conviennent à toute loxodromie.

Les variables φ et r forment un système particulier de coordonnées dont l'une s'exprime en fonction de l'autre par une simple quadrature, lorsqu'on a r' en fonction de r. Ainsi, par exemple, sur une sphère de rayon égal à l'unité de longueur,

$$r' = \sin r,$$

et la première des équations (1) donne

$$d\varphi = \frac{dr}{\sin r} \cdot \operatorname{tang} \beta,$$

d'où

$$\varphi = \text{const} + \operatorname{tang} \beta . l \left(\operatorname{tang} \frac{r}{2}\right).$$

On déduit toujours la formule (5) de la seconde des équations (1), et, par conséquent, *la rectification d'un arc* BB_1 *de loxodromie ne dépend que de celle de l'arc de la méridienne compris entre les parallèles de la surface qui passent par les points* B *et* B_1.

II. Comme l'hélice conique coupe sous un angle constant les génératrices du cylindre qui la projette parallèlement à l'axe du cône, nous avons pu nous servir de quelques propriétés qui appartiennent, en général, aux hélices cylindriques dont l'hélice qu'on étudie ordinairement n'est qu'un cas particulier. Voici l'énoncé du théorème sur lequel nous nous sommes appuyés :

Le rayon de courbure d'une hélice cylindrique a, en chaque point, la même direction que le rayon de courbure de la section droite du cylindre, et ces deux rayons sont dans un rapport constant.

La réciproque de la première partie est vraie.

On déduit de ce théorème le corollaire suivant :

Le plan osculateur d'une hélice cylindrique est en chaque point perpendiculaire au plan qui touche le cylindre, et réciproquement.

III. *Le lieu des traces des tangentes à l'hélice conique sur le plan* $\widehat{xy}$ *est une spirale semblable à la projection de l'hélice sur ce plan, et ce lieu est l'enveloppe de la trace du plan osculateur.*

En effet :

1°. L'angle $M'OK$ est toujours droit, et l'on a

$$\frac{OK}{r'} = \operatorname{tang} OM'K = \text{const.}$$

2°. La trace sur $\widehat{xy}$ du plan osculateur en M à l'hélice conique passe par le point K, et elle fait avec OK un angle égal à $OM'K$, puisqu'elle est perpendiculaire à $M'K$, de sorte qu'elle est tangente au lieu des points K.