NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

T. JOACHIMSTHAL

Sur une formule relative aux tangentes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 323-326

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__323_1>

SUR UNE FORMULE RELATIVE AUX TANGENTES;

PAR M. T. JOACHIMSTHAL (*).

La formule dont je vais donner la démonstration est la suivante :

$$1 - \frac{\operatorname{tang} mx}{\operatorname{tang} x} + \frac{\operatorname{tang} mx . \operatorname{tang}(m-1)x}{\operatorname{tang} x . \operatorname{tang} 2x} - \ldots$$

$$= (-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{tang} mx . \operatorname{tang}(m-1)x \ldots \operatorname{tang} x, \quad \text{pour } m \text{ pair};$$

$$= 0, \quad \text{pour } m \text{ impair}.$$

(*) Maintenant professeur à l'Université de Halle.

On la démontre par une méthode dont M. Gauss s'est servi pour deux séries bien connues, d'une forme semblable.

En désignant

$$\frac{\operatorname{tang} mx . \operatorname{tang}(m-1)x \ldots \operatorname{tang}(m-\mu+1)x}{\operatorname{tang} x . \operatorname{tang} 2x \ldots \operatorname{tang} \mu x} = (m, \mu),$$

on aura

$$(1) \qquad (m, \mu) \operatorname{tang}(m-\mu)x = (m-1, \mu) \operatorname{tang} mx,$$

$$(2) \quad \begin{cases} (m, \mu+1) = (m, \mu) \dfrac{\operatorname{tang}(m-\mu)x}{\operatorname{tang}(\mu+1)x}, \\ (m-1, \mu+1) = (m-1, \mu) \dfrac{\operatorname{tang}(m-\mu-1)x}{\operatorname{tang}(\mu+1)x}. \end{cases}$$

Il suit de là

$$\begin{aligned} &(m, \mu+1) - (m-1, \mu+1) \\ &= \frac{(m, \mu) \operatorname{tang}(m-\mu)x - (m-1, \mu) \operatorname{tang}(m-\mu-1)x}{\operatorname{tang}(\mu+1)x} \\ &= (m-1, \mu) \frac{\operatorname{tang} mx - \operatorname{tang}(m-\mu-1)x}{\operatorname{tang}(\mu+1)x} \\ &= (m-1, \mu)[1 + \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-\mu-1)x], \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} (m-1, \mu) &= (m-1, \mu+1) + (m-1, \mu) \\ &+ (m-1, \mu) \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-\mu-1)x. \end{aligned}$$

A l'aide de cette formule on peut décomposer les termes de la série

$$1 - (m, 1) + (m, 2) - \ldots = f(m),$$

comme il suit :

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ -(m, 1) &= -(m-1, 1) - 1 - \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-1)x, \\ (m, 2) &= (m-1, 2) + (m-1, 1) \\ &\quad + \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-2)x . (m-1, 1), \end{aligned}$$

$$-(m, 3) = -(m-1, 3) - (m-1, 2)$$
$$\qquad - \operatorname{tang} mx . \operatorname{tang}(m-3)x . (m-1, 2),$$

. . . .

$$\varepsilon(m, m-1) = \varepsilon(m-1, m-1) + \varepsilon(m-1, m-2)$$
$$+ \varepsilon \operatorname{tang} mx \operatorname{tang} x . (m-1, m-2),$$
$$-\varepsilon(m, m) = -\varepsilon(m-1, m-1),$$
$$\varepsilon = (-1)^{m-1}.$$

En additionnant ces équations, on trouve

$$f(m) = -\operatorname{tang} mx \begin{bmatrix} \operatorname{tang}(m-1)x \\ -(m-1, 1)\operatorname{tang}(m-2)x \\ +(m-1, 2)\operatorname{tang}(m-3)x \\ -\ldots + \varepsilon(m-1, m-2)\operatorname{tang} x \end{bmatrix};$$

mais, en vertu de la relation (1), on a

$$(m-1, 1)\operatorname{tang}(m-2)x = (m-2, 1)\operatorname{tang}(m-1)x,$$
$$(m-1, 2)\operatorname{tang}(m-3)x = (m-2, 2)\operatorname{tang}(m-1)x,$$
etc.,

donc

$$f(m) = -\operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-1)x[1-(m-2, 1)+(m-2, 2)-\ldots],$$

et, par suite,

$$(3) \qquad f(m) = -\operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-1)x f(m-2),$$

ou bien, par un calcul bien simple,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(m) = (-1)^n \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-1)x \ldots \\ \operatorname{tang}(m-2n+1)x\, f(m-2n); \quad m > 2n. \end{array} \right.$$

En remarquant qu'on a

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0,$$

on parvient à l'équation

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(m) = (-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{tang} mx \operatorname{tang}(m-1)x \ldots \operatorname{tang} x, \\ \qquad \text{pour } m \text{ pair}, \\ \qquad = 0, \text{ pour } m \text{ impair}; \end{array} \right.$$

ce qu'il fallait démontrer.

M. Heine (*), auquel j'avais communiqué ces résultats, m'en a donné une démonstration analogue à celle qu'il a publiée pour les deux séries de M. Gauss. (Crelle, *Journal de Mathématiques*, tome XXXIX, p. 288; 1850.)

Il prend pour point de départ les équations

$$\frac{(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)\ldots}{(1-x)(1-qx)(1-q^2x)\ldots} = 1 + \frac{1+q}{1-q}x + \frac{(1+q)(1+q^2)}{(1-q)(1-q^2)}x^2 + \ldots,$$

$$\frac{(1-qx)(1-q^2x)(1-q^3x)\ldots}{(1+x)(1+qx)(1+q^2x)\ldots} = 1 - \frac{1+q}{1-q}x + \frac{(1+q)(1+q^2)}{(1-q)(1-q^2)}x^2 - \ldots.$$

En les multipliant, on obtient

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{m=0}^{m=\infty} x^m \frac{(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^m)}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)}$$
$$\times\left(1 - \frac{1+q}{1-q}\,\frac{1-q^m}{1+q^m} + \frac{1+q}{1-q}\,\frac{1+q^2}{1-q^2}\,\frac{1-q^m}{1+q^m}\cdot\frac{1-q^{m-1}}{1+q^{m-1}}\ldots\right),$$

donc

$$1 - \frac{1+q}{1-q}\,\frac{1-q^m}{1+q^m} + \frac{1+q}{1-q}\cdot\frac{1+q^2}{1-q^2}\cdot\frac{1-q^m}{1+q^m}\cdot\frac{1-q^{m-1}}{1+q^{m-1}}$$
$$-\ldots = \frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)}{(1+q)(1+q^2)\ldots(1+q^m)}, \text{ pour } m \text{ pair},$$
$$= 0, \text{ pour } m \text{ impair};$$

ce qui coïncide avec l'équation (5).