NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

SCHLOMILCH

Remarques sur le calcul des dérivées des fonctions x^a et a^x

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 31-33

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__31_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

REMARQUES SUR LE CALCUL DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS x^a ET a^x;

PAR M. SCHLOMILCH,
Professeur à Dresde.

La manière ordinaire de développer les dérivées de x^a et a^x consiste à recourir à la formule du binôme démontrée par quelques considérations relatives aux combinaisons. Mais, comme les formules qu'il s'agit de développer sont fort simples, il vaut mieux éviter l'emploi d'une formule plus compliquée; cela se fait facilement à l'aide de la formule tout à fait élémentaire

$$(1)\quad \frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2} + a^{m-3}b^2 + \ldots + b^{m-1},$$

comme nous le ferons voir.

1. Quant à la dérivée de la fonction x^m, on a

$$\frac{d(x^m)}{dx} = \lim \frac{(x+\delta)^m - x^m}{\delta} = \lim \frac{(x+\delta)^m - x^m}{x+\delta-x};$$

et, en faisant usage de la formule (1), on trouve sur-le-champ

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}.$$

Après avoir démontré cette formule pour le cas d'un exposant positif et entier, il est très-facile de la généraliser par des méthodes connues : on fera

$$x^{\frac{p}{q}} = y,$$

par conséquent,

$$x^p = y^q,$$

ce qui donne

$$\frac{d(x^p)}{dx} = \frac{d(y^q)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \cdots$$

2. Pour développer la dérivée de la fonction a^x, il est nécessaire de démontrer que l'expression $\left(1+\frac{1}{s}\right)^s$ converge vers une limite déterminée quand on fait croître à l'infini le nombre s. Cela se fait de la manière suivante : En supposant $a > b$, l'équation (1) donne l'inégalité

$$\frac{a^m - b^m}{a-b} < ma^{m-1} \quad \text{ou} \quad a^m - b^m < m(a-b)\,a^{m-1};$$

on tire de là

$$(3) \qquad [a - m(a-b)]\,a^{m-1} < b^m;$$

et, en prenant

$$a = 1 + \frac{1}{m-1}, \quad b = 1 + \frac{1}{m},$$

on a immédiatement

$$(4)\qquad \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} < \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}.$$

Cela prouve que la quantité $\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s}$ croît toujours, si s est un nombre positif et entier qui devient infiniment grand.

Prenons maintenant

$$a = 1 + \frac{1}{2n}, \quad b = 1 \quad \text{et} \quad m = n + 1;$$

alors l'inégalité (3) se change en celle-ci :

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} < 1, \quad \text{ou} \quad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n} < 2.$$

Il s'ensuit

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4 \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} < 4,$$

en vertu de la formule (4).

La quantité $\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s}$ reste donc toujours inférieure au nombre 4; on en conclut qu'il doit exister une limite déterminée vers laquelle converge l'expression dont il s'agit; cette limite est comprise entre les nombres $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1} = 2$ et 4; en la désignant par e, nous aurons

$$\lim\left(1+\frac{1}{s}\right)^{s} = e,$$

pourvu que s soit un nombre positif et entier. La démonstration, pour le cas de s fractionnaire ou négatif, se fait de la même manière, comme on le voit dans les Traités du calcul différentiel.