Nouvelles annales de mathématiques

Cornélius Keogh
V.-A. Lebesgue

La trigonométrie sphérique, simplifiée dans ses formules et ses démonstrations

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 304-312
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__304_0>

LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE, SIMPLIFIÉE DANS SES FORMULES ET SES DÉMONSTRATIONS;

PAR MM. CORNÉLIUS KEOGH (*) ET V.-A. LEBESGUE.

Deux remarques très-simples, tirées d'un Mémoire inédit de M. Cornélius Keogh, permettent, l'une de simplifier les formules de la trigonométrie sphérique, l'autre d'en abréger les démonstrations.

L'application de ces deux remarques sera l'objet d'un Traité de Trigonométrie renfermant, en outre, quelques améliorations de détail.

L'objet de la présente Note est de faire connaître à l'avance les deux principes et leur application.

1.

Simplification des formules.

Elle consiste en ceci : a, b, c étant les côtés d'un triangle ABC tracé sur une sphère de rayon 1, A, B, C représentent, non les arcs de rayon 1 qui mesurent les angles proprement dits ou *intérieurs*, mais bien les arcs qui mesurent les angles *extérieurs*, suppléments des premiers.

Ainsi dans un triangle ABC, les côtés seront a, b, c; les angles extérieurs A, B, C.

Dans le triangle polaire, les côtés seront A, B, C; les angles extérieurs a, b, c.

D'une formule donnée, on en tirera toujours une autre par le changement de

$$a,\quad \sin a,\quad \cos a,\quad \sin \frac{1}{2} a,\quad \cos \frac{1}{2} a, \ldots$$

(*) Prononcez *Kiou*.

en

$$A, \quad \sin A, \quad \cos A, \quad \sin \frac{1}{2} A, \quad \cos \frac{1}{2} A, \ldots,$$

et non

$$A, \quad \sin A, \quad -\cos A, \quad \cos \frac{1}{2} A, \quad \sin \frac{1}{2} A, \ldots,$$

comme dans la méthode usuelle, qui peut altérer sensiblement la formule primitive, quand elle n'est pas très-simple.

Les deux exemples suivants montreront l'avantage de la méthode que nous proposons.

Premier exemple.

Méthode usuelle.

a, b, c sont les côtés $a + b + c = 2p$;
A, B, C sont les angles *intérieurs*.

$$A + B + C - 180^\circ = 2P.$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin(p - b)\sin(p - c)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin p . \sin(p - a)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin(B - P)\sin(C - P)}{\sin B \sin C},$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin P . \sin(A - P)}{\sin B . \sin C}.$$

On rencontre deux irrégularités : sin changé en cos; $p - c$ en $C - P$, etc.

Méthode proposée.

a, b, c sont les côtés $a + b + c = 2p$;
A, B, C sont les angles *extérieurs*.

$$A + B + C = 2P.$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c},$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin p . \sin(p-a)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin(P-B)\sin(P-C)}{\sin B \sin C},$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} a = \frac{\sin p . \sin(P-A)}{\sin B \sin C}.$$

Les irrégularités signalées ont disparu.

On tire de ces formules

$$\sin^2 A \sin^2 b . \sin^2 c = 4 . \sin p . \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c);$$

il est à remarquer que $\sin A \sin b \sin c$ est le volume du parallélipipède dont trois côtés contigus et égaux sont OA, OB, OC, en supposant que O est le centre de la sphère, et A, B, C les sommets du triangle sphérique. C'est le *rhomboèdre normal* (C. Keogh).

Il résulte de là, ces équations

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

$$= \frac{2\sqrt{\sin p . \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin a \sin b \sin c},$$

qui serviront plus loin.

Il est bon de remarquer que les valeurs de $\sin^2 \frac{1}{2} A$, $\cos^2 \frac{1}{2} A$ se tirent presque immédiatement du théorème de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit; ces formules pourraient être regardées comme fondamentales, d'autant plus qu'elles donnent

$$\cos^2 \frac{1}{2} A - \sin^2 \frac{1}{2} A = \cos A = \frac{\cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c}.$$

Carnot a déjà remarqué que toute la trigonométrie rectiligne se tire du théorème de Ptolémée (*). Il en serait de même de la trigonométrie sphérique.

Deuxième exemple. — *Formules de Delambre.*

Méthode usuelle.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

On trouve ici le rapport de sin à cos; et, réciproquement, le rapport de cos à sin.

Méthode proposée.

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$-\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},$$

(*) Ptolémée lui-même fonde toute sa trigonométrie sur ce théorème.

TM.

$$-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

Toujours ici rapport de sin à sin ou de cos à cos.

L'apparition du signe — ne rend en rien les applications moins faciles.

Analogies de Néper.

Méthode usuelle.

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)=\cot\frac{1}{2}C\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)=\cot\frac{1}{2}C\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\,.\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Il y a ici un changement de cot en tang.

Méthode proposée.

$$-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+B)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}C.\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A-B)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}C.\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c\ \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$-\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tang}\frac{1}{2}c.\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Ici les tangentes se présentent toujours; le passage au triangle polaire est mieux marqué, de même que dans les formules de Delambre.

L'article suivant montre un autre avantage de la nouvelle notation.

II.

Simplification des démonstrations.

Elle repose sur ce principe : Prolongez deux des côtés, b, c par exemple, au-dessous du côté a pris pour base, et vous compléterez un fuseau; les deux triangles ABC, A'BC auront un côté commun $BC = a$.

Les angles opposés intérieurs ou extérieurs seront égaux $A = A'$.

De plus, les quatre autres parties du second triangle seront

$$\pi - b,\quad \pi - c,\quad \pi - B,\quad \pi - C.$$

Celles du premier étant

$$b,\quad c,\quad B,\quad C,$$

pour cette raison les deux triangles seront nommés *supplémentaires adjacents* par le côté a.

Tout triangle a trois triangles supplémentaires adjacents par les côtés a, b, c, respectivement.

Ainsi, dans certains cas, une formule en donnera trois autres en passant aux triangles supplémentaires, on en aurait huit si l'on employait simultanément les triangles supplémentaires et les triangles polaires. De là un moyen d'abréger les démonstrations en employant des combinaisons d'équations appropriées à la recherche (*).

Il est bien facile de voir que la première analogie de Néper donne la seconde en passant au triangle supplémentaire, puis la considération des triangles polaires donne les deux autres.

Pour les formules de Delambre, la première donne la quatrième de deux manières, par le passage au triangle polaire et le passage au triangle supplémentaire. Les deuxième et troisième ne changent pas quand on passe au triangle polaire; mais l'une vient de l'autre par le passage au triangle supplémentaire.

Surface du triangle.

Si l'on représente par S la surface d'un triangle où les angles extérieurs sont A, B, C, et par S_a, S_b, S_c les surfaces des triangles supplémentaires adjacents par les côtés a, b, c, on trouvera sans difficulté

$$\begin{aligned} S &= 2\pi - (A + B + C), \\ S_a &= \quad\; - A + B + C, \\ S_b &= \qquad A - B + C, \\ S_c &= \qquad A + B - C; \end{aligned}$$

(*) C'est précisément ce que fait Viète (*Opera mathematica*, page 421; édit. de Schooten).

d'où

$$\sin\frac{1}{2}S = \sin\frac{1}{2}(A+B+C),$$

$$\sin\frac{1}{2}S_a = \sin\frac{1}{2}(-A+B+C),$$

$$\sin\frac{1}{2}S_b = \sin\frac{1}{2}(A-B+C),$$

$$\sin\frac{1}{2}S_c = \sin\frac{1}{2}(A+B-C).$$

Il suit de là, par développement,

$$\sin\frac{1}{2}S = \sin\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B.\cos\frac{1}{2}C + \cos\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B.\cos\frac{1}{2}C$$
$$+\cos\frac{1}{2}A.\cos\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C - \sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C;$$

d'où, par substitution,

$$\sin\frac{1}{2}S = \frac{\sin(p-a)+\sin(p-b)+(p-c)-\sin p}{\sin a\sin b\sin c}$$
$$\times\sqrt{\sin p.\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)},$$

qui se réduit à

$$\sin\frac{1}{2}S = \frac{\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\sin C = \sin\frac{1}{2}(A+B+C);$$

de là

$$\sin\frac{1}{2}S_a = \frac{\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c}\sin C = \sin\frac{1}{2}(-A+B+C),$$

$$\sin\frac{1}{2}S_b = \frac{\cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c}\sin C = \sin\frac{1}{2}(A-B+C),$$

$$\sin\frac{1}{2}S_c = \frac{\cos\frac{1}{2}a\,.\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}\sin C = \sin\frac{1}{2}(A + B - C).$$

La première et la quatrième donnent, par addition, les deux premières formules de Delambre. La deuxième et la troisième donnent de même les deux autres.

Les formules de Delambre donnent, par division, les analogies de Néper.

Ces exemples paraissent justifier nos deux assertions : la simplification des formules, celle des démonstrations. Un travail plus étendu le montrera mieux encore.