

T.-B. KHORASSANDJI

**Solution de la question 271 (Steiner)**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 12  
(1853), p. 289-292

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1853\\_1\\_12\\_\\_289\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__289_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1853, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SOLUTION DE LA QUESTION 271 (STEINER)**

(voir p. 99);

PAR M. T.-B. KHORASSANDJI, Arménien.

**THÉORÈME.** *Par le point  $p$  et les sommets  $A, B, C$ , on mène trois droites rencontrant respectivement les côtés  $a, b, c$  en  $a_1, b_1, c_1$ ; si l'on a*

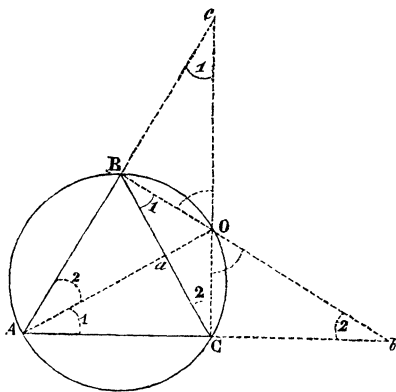
$$Ap \cdot Bp \cdot Cp = a_1 p \cdot b_1 p \cdot c_1 p,$$

*Ann. de Mathémat., t. XII. (Août 1853.)*

le lieu des points  $p$  est une ellipse circonscrite au triangle, et ayant pour centre, le centre de gravité du triangle.

*Lemme.* Soit  $O$  un point quelconque de la circonférence circonscrite au triangle équilatéral  $ABC$ ; prolongons  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  jusqu'en  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , où ces droites coupent les côtés opposés aux sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ; nous aurons l'égalité

$$(A) \quad OA \times OB \times OC = Oa \times Ob \times Oc.$$



*Démonstration.* A cause de l'égalité des trois arcs  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$ , et par suite de la théorie de la mesure des angles, il est facile de voir que les angles en  $c$ ,  $b$ , marqués (1) et (2), sont égaux respectivement aux angles en  $A$ , marqués (1) et (2). D'ailleurs, chacun des angles  $BOc$ ,  $BOa$ ,  $COa$  et  $COb$  est égal à l'angle du triangle équilatéral. Cela posé,

1°. Les triangles semblables  $AOB$ ,  $AOc$  donnent

$$\frac{OA}{Oc} = \frac{Ob}{OA},$$

d'où

$$(1) \quad \overline{OA}^2 = Ob \cdot Oc;$$

( 291 )

2°. Les triangles semblables  $BOc$ ,  $BOa$  donnent

$$\frac{BO}{Oa} = \frac{Oc}{OB},$$

d'où

$$(2) \quad \overline{OB}^2 = Oc \cdot Oa;$$

3°. Les triangles semblables  $COa$ ,  $COb$  donnent

$$\frac{CO}{Ob} = \frac{Oa}{OC},$$

d'où

$$(3) \quad \overline{OC}^2 = Oa \cdot Ob.$$

Multipliant membre à membre les égalités (1), (2) et (3), on trouve

$$\overline{OA}^2 \times \overline{OB}^2 \times \overline{OC}^2 = \overline{Oa}^2 \times \overline{Ob}^2 \times \overline{Oc}^2,$$

ou, enfin,

$$(A) \quad OA \times OB \times OC = Oa \times Ob \times Oc.$$

C. Q. F. D.

*Remarque I.* On sait que l'on a

$$OA = OB + OC.$$

Donc, en remplaçant ces lignes par leurs valeurs, tirées des équations (1), (2) et (3), on a

$$\sqrt{Ob \cdot Oc} = \sqrt{Oc \cdot Oa} + \sqrt{Oa \cdot Ob}.$$

*Remarque II.* On peut écrire l'équation (A) ainsi qu'il suit :

$$(A') \quad \frac{OA}{Oa} \times \frac{OB}{Ob} \times \frac{OC}{Oc} = 1.$$

Sous cette forme, on voit que la relation est projective cylindriquement; mais si l'on fait une projection cylindrique de la figure précédente, le cercle devient une el-

( 292 ) .

lipse, le triangle équilatéral inscrit au cercle devient un triangle d'aire maximum inscrit dans l'ellipse, et ayant par suite son centre de gravité au centre même de l'ellipse. On retrouve ainsi le théorème de M. Steiner, qui fait l'objet de la question 271.