NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ANGELO GENOCCHI

Sur les sommes de puissances semblables des racines d'une équation algébrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 260-272

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__260_1>

SUR LES SOMMES DE PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÈBRIQUE;

PAR M. ANGELO GENOCCHI,
Avocat.

Pour obtenir l'expression de la somme des puissances semblables des racines d'une équation algébrique donnée, on peut employer la série

$$\frac{1}{u^n} + \left(\frac{1}{u^n}\right)' fu + \frac{1}{1.2}\,\frac{d.\left(\frac{1}{u^n}\right)'(fu)^2}{du} + \frac{1}{1.2.3}\,\frac{d^2.\left(\frac{1}{u^n}\right)'(fu)^3}{du^2} + \frac{1}{1.2.3.4}\,\frac{d^3.\left(\frac{1}{u^n}\right)'(fu)^4}{du^3} + \ldots,$$

où fu désigne une fonction entière de u, et $\left(\frac{1}{u^n}\right)'$ la dérivée $-nu^{-n-1}$ de $\frac{1}{u^n}$; en effet, cette série, qui, prise en entier, représente la puissance $(-n)^{\text{ième}}$ d'une racine t de l'équation

$$t = u + ft,$$

exprime la somme des puissances $(-n)^{\text{ièmes}}$ de toutes les racines de cette équation, en ne conservant que les puissances négatives de u. Ce beau théorème a été démontré par Lagrange, dans les *Mémoires de Berlin* pour 1768, et dans le *Traité de la Résolution des équations numériques*, Note XI; et il me semble qu'on doit être surpris de ne pas le trouver dans l'*Algèbre supérieure* de M. Serret.

Ce théorème s'applique à l'équation

$$t = u + ht^2,$$

en prenant

$$ft = ht^2;$$

le terme général

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}\,\frac{d^{p-1}\left(\frac{1}{u^n}\right)'(fu)^p}{du^{p-1}}$$

deviendra

$$(-1)^p.\frac{n(n-2p+1)(n-2p+2)\ldots(n-p-1)}{1.2.3\ldots p}\,h^p u^{-(n-p)};$$

et, comme on doit omettre les termes dans lesquels l'exposant de u est positif, on assignera à p les seules valeurs $1, 2, 3, \ldots, n-1$, ou même les seules qui ne surpassent pas $\frac{n}{2}$; car pour les autres le coefficient du terme général s'annule. Ainsi on aura, en appelant x, y

les racines de l'équation proposée,

$$\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} = u^{-n} - nhu^{-(n-1)} + \frac{n(n-3)}{1.2} h^2 u^{-(n-2)}$$
$$- \frac{n(n-5)(n-4)}{1.2.3} h^3 u^{-(n-3)} + \ldots$$
$$+ (-1)^p \frac{n(n-2p+1)(n-2p+2)\ldots(n-p-1)}{1.2.3\ldots p} h^p u^{-(n-p)} + \ldots.$$

Si nous supposons $h = u$, nous aurons $y = \frac{1}{x}$, et en faisant $\frac{1}{u} = z$, nous obtiendrons une expression de $x^n + \frac{1}{x^n}$ en fonction de $z = x + \frac{1}{x}$, qui ne différera point de l'expression du polynôme V_n donnée par M. Serret dans sa XIV^e leçon (*Algèbre supérieure,* page 78). On voit donc que le théorème de Lagrange conduit immédiatement à une formule à laquelle M. Serret ne parvient que par une méthode fort compliquée.

Au reste, pour trouver cette formule, on peut aussi se servir de la méthode indiquée dans l'ouvrage cité (I^{re} leçon, page 10), ce qui en fournira une démonstration tout à fait élémentaire et assez simple. En faisant

$$z = x + y, \quad xy = 1,$$

on a

$$1 + t^2 - tz = (t - x)(t - y),$$

et, par suite,

$$\frac{2t - z}{1 + t^2 - tz} = \frac{1}{t - x} + \frac{1}{t - y};$$

d'où il résulte que dans le développement de la fraction $\frac{2t - z}{1 + t^2 - tz}$, le coefficient de la puissance t^{n-1} sera égal à

$$-\left(\frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n}\right) = -\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

Or

$$\frac{1}{1+t^2-tz}=\frac{1}{1+t^2}+\frac{tz}{(1+t^2)^2}+\frac{t^2z^2}{(1+t^2)^3}+\frac{t^3z^3}{(1+t^2)^4}+\ldots,$$

où le coefficient de z^m est $\frac{t^m}{(1+t^2)^{m+1}}$; de plus, le terme général du développement de $(1+t^2)^{-m-1}$ est

$$(-1)^{p-1}\cdot\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)}t^{2(p-1)};$$

de sorte que le terme général du développement de la fraction $\frac{1}{1+t^2-tz}$ sera

$$(-1)^{p-1}\cdot\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)}t^{2(p-1)+m}z^m.$$

Il est aisé d'en tirer celui qui se rapporte à la fraction $\frac{2t-z}{1+t^2-tz}$, car en multipliant l'expression précédente par $2t$, et remplaçant m par $m+1$, on aura

$$(-1)^{p-1}\cdot\frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+p)}{1.2.3\ldots(p-1)}\cdot 2t^{2p+m}z^{m+1}$$

pour le terme général de $\frac{2t}{1+t^2-tz}$, et en multipliant ce terme par z, et remplaçant p par $p+1$, on aura

$$(-1)^p\cdot\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p)}{1.2.3\ldots p}t^{2p+m}z^{m+1}$$

pour le terme général de $\frac{z}{1+t^2-tz}$; la différence de ces deux termes généraux sera le terme général cherché, savoir :

$$-(-1)^p\cdot\frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+p)}{1.2.3\ldots p}(m+1+2p).\,t^{2p+m}z^{m+1}.$$

Faisons

$$m + 1 + 2p = n;$$

ce terme général devient

$$-(-1)^p \cdot \frac{(n-2p+1)(n-2p+2)\ldots(n-p-1)n}{1.2.3.\;.p} z^{n-2p} t^{n-1},$$

et donnera

$$(-1)^p \cdot \frac{n(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+2)(n-2p+1)}{1.2.3\ldots p} z^{n-2p}$$

pour le terme général du polynôme qui sera le coefficient de t^{n-1} dans le développement de la fraction $-\frac{2t-z}{1+t^2-tz}$, c'est-à-dire pour le terme général de l'expression de

$$x^n + \frac{1}{x^n} = V_n.$$

On obtient de la même manière l'expression de la fonction

$$U_n = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) + \ldots + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1,$$

qui se réduit à

$$\begin{aligned} &x^n + y^n + x^{n-1} + y^{n-1} + \ldots + x + y + 1 \\ &= \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x-y} + \frac{x^n - y^n}{x-y}, \end{aligned}$$

puisque $xy = 1$. En effet, on a

$$\frac{x-y}{1+t^2-tz} = \frac{1}{t-x} - \frac{1}{t-y},$$

et, par suite, le coefficient de t^{n-1} dans le développement de la fraction $\frac{1}{1+t^2-tz}$ doit égaler

$$\frac{1}{x-y}\left(\frac{1}{y^n} - \frac{1}{x^n}\right) = \frac{x^n - y^n}{x-y};$$

or on a trouvé, pour le terme général du même développement,

$$(-1)^{p-1}\cdot\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-1)}{1.2.3\ldots(p-1)}t^{2(p-1)+m}z^m,$$

qui devient

$$(-1)^p\cdot\frac{(n-2p)(n-2p+1)\ldots(n-p-1)}{1.2.3\ldots p}z^{n-2p-1}t^{n-1},$$

si l'on change p en $p+1$, et qu'on fasse

$$2p+m=n-1;$$

donc

$$(-1)^p\cdot\frac{(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p)}{1.2.3\ldots p}z^{n-2p-1}$$

sera le terme général du coefficient de t^{n-1} dans le développement indiqué, et, par suite, le terme général de l'expression de $\frac{x^n-y^n}{x-y}$. En remplaçant n par $n+1$, on aura le terme général de $\frac{x^{n+1}-y^{n+1}}{x-y}$, et la réunion des deux résultats donnera le terme général du polynôme U_n, lequel s'accorde avec la formule de la p. 180 de l'*Algèbre supérieure*.

Euler a donné, dans un de ses Mémoires (*Observationes circa radices æquationum, Novi Comm. Acad. Petropol.*, tome XV, *pro anno* 1770) un théorème qui revient à celui de Lagrange ci-dessus énoncé, comme l'a remarqué M. Ménabréa (*). Euler considère l'équation

$$1=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\ldots,$$

et forme l'expression de la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ de ces racines; il trouve qu'en partageant les termes de cette expression en divers *ordres*, ceux de l'ordre $\lambda+1$

(*) Où?

seront

$$+\frac{n(n-\lambda-1)(n-\lambda-2)\ldots(n-2\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda}A^{n-2\lambda}O,$$
$$+\frac{n(n-\lambda-2)(n-\lambda-3)\ldots(n-2\lambda)}{1.2.3\ldots\lambda}A^{n-2\lambda-1}P,$$
$$+\frac{n(n-\lambda-3)(n-\lambda-4)\ldots(n-2\lambda-1)}{1.2.3\ldots\lambda}A^{n-2\lambda-2}Q+\ldots,$$

où les coefficients O, P, Q, ... doivent être déterminés à l'aide de l'équation

$$O+Pz+Qz^2+\ldots=(B+Cz+Dz^2+\ldots)^\lambda,$$

et où l'on doit omettre les termes contenant des puissances négatives de A; enfin il ajoute que la même expression représentera la puissance $n^{ième}$ de l'une des racines de la proposée, si l'on retient tous ses termes. Or, en faisant

$$\frac{1}{x}=t,\quad \frac{1}{A}=u,\quad -\frac{1}{A}(Bt^2+Ct^3+Dt^4+\ldots)=ft,$$

l'équation d'Euler devient

$$t=u+ft;$$

les puissances négatives de t et de u répondent aux puissances positives de x et de A, et, de plus, on a

$$A^\lambda.\left(\frac{1}{u^n}\right)(fu)^\lambda$$
$$=(-1)^{\lambda+1}\ldots n\,(Ou^{-n-1}+Pu^{-n}+Qu^{-n-1}+\ldots).\,u^{2\lambda},$$

puisque

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-nu^{-n-1},$$

d'où il est clair que les termes de l'ordre $\lambda+1$ de l'expression d'Euler forment une somme égale au terme

$$\frac{d^{\lambda-1}.\left(\frac{1}{u^n}\right)'(fu)^\lambda}{1.2.3\ldots\lambda du^{\lambda-1}}$$

de la série de Lagrange; et cela met hors de doute l'identité des deux théorèmes.

Ces formules s'appliquent avec la plus grande facilité aux équations trinômes, comme on l'a vu pour les équations du second degré; et aussi, c'est une série de Lambert relative aux équations trinômes qui a occasionné les recherches contemporaines de Lagrange et d'Euler sur ce sujet (*voir* un Mémoire de Lambert dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1770).

Les mêmes formules conduisent à celles de Waring rapportées dans les *Nouvelles Annales*, tome VIII, page 76; car le terme général du développement de la puissance $(B + Cz + Dz^2 + \ldots)^\lambda$ est représenté par

$$\frac{1.2.3\ldots\lambda}{1.2\ldots\rho.1.2\ldots\sigma.1.2\ldots\tau\ldots} B^\rho C^\sigma D^\tau \ldots z^p,$$

sous les conditions

$$\rho + \sigma + \tau + \ldots = \lambda, \quad \sigma + 2\tau + \ldots = p,$$

et l'on a

$$\begin{aligned}(n - \lambda - p - 1)(n - \lambda - p - 2)\ldots(n - 2\lambda - p + 1) \\ = \frac{1.2.3\ldots(n - \lambda - p - 1)}{1.2.3\ldots(n - 2\lambda - p)};\end{aligned}$$

donc, si l'on change λ en u, p en $p - 2u$, on aura

$$\rho + \sigma + \tau + \ldots = u, \quad 2\rho + 3\sigma + 4\tau + \ldots = p,$$

et l'on verra que le coefficient de $A^{n-p}.B^\rho C^\sigma D^\tau, \ldots$, dans l'expression cherchée, sera

$$\frac{n[n - p + u - 1]}{[\rho][\sigma][\tau]\ldots[n - p]},$$

les crochets désignant des produits continuels. C'est la valeur qu'on doit prendre pour R dans l'endroit cité (page 77), où je crois qu'il s'est glissé quelque erreur typographique dans l'expression de cette quantité.

Je remarque enfin qu'à l'aide des sommes de puissances, on détermine les autres fonctions symétriques entières des racines, et qu'on peut réduire, en vertu d'un théorème connu, à une fonction entière toute fonction rationnelle des racines. Ce théorème, que M. Abel Transon semble attribuer à M. Serret (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 81), est démontré dans un Mémoire de M. Gauss, du 16 septembre 1814 (*Comment. Soc. Gotting recent.*, tome III).

Note. On a vu que

$$-(-1)^p.\frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+p)}{1.2\ldots p}(m+1+2p)$$

est le coefficient de $t^{2p+m}z^{m+1}$ dans le développement de la fraction $\frac{2t-z}{1+t^2-tz}$, et la méthode employée revient à démontrer que tel est le coefficient de t^{2p+m}, dans le développement de la fonction $\frac{2t^{m+2}}{(1+t^2)^{m+2}}-\frac{t^m}{(1+t^2)^{m+1}}$ (p. 263). Or ce coefficient se transforme en

$$-(-1)^p.\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)}{1.2\ldots(m+1)}(m+1+2p),$$

en multipliant ses numérateurs et dénominateurs par $(p+1)(p+2)\ldots(m+1)$, si $p<m+1$, ou en les divisant par $(m+2)(m+3)\ldots p$, si $p>m+1$. Faisons $m+1+2p=k$, et, supposant m pair, changeons m en $2m$; il viendra

$$\begin{aligned}
k &= 2p+2m+1,\\
2(p+1) &= k-2m+1,\\
2(p+2) &= k-2m+3,\\
2(p+3) &= k-2m+5,\ldots,\\
2(p+m) &= k-1,\\
2(p+m+1) &= k+1,\ldots,\\
2(p+2m-2) &= k+2m-5,\\
2(p+2m-1) &= k+2m-3,\\
2(p+2m) &= k+2m-1,
\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit

$$2^{2m}.(p+1)(p+2)\ldots(p+2m)$$
$$=(k^2-1)(k^2-9)(k^2-25)\ldots[k^2-(2m-1)^2],$$

et, par conséquent, le coefficient de t^{k-1}, dans le développement de la fonction $\frac{2t^{2m+2}}{(1+t^2)^{2m+2}}-\frac{t^{2m}}{(1+t^2)^{2m+1}}$, sera

$$-(-1)^{\frac{k-1}{2}+m}.\frac{k(k^2-1)(k^2-9)(k^2-25)\ldots[k^2-(2m-1)^2]}{1.2.3\ldots(2m+1).2^{2m}}.$$

Cela conduit à la démonstration de l'équation suivante, que M. Cauchy a donnée dans les *Mémoires des Savants étrangers*, tome I^er, page 798, en la déduisant d'une intégration assez compliquée, et qu'il lui semblait difficile d'établir directement :

$$k-\frac{k(k^2-1)}{1.2.3.2^2}\frac{2}{1}+\frac{k(k^2-1)(k^2-9)}{1.2.3.4.5.2^4}\frac{3.4}{1.2}$$
$$-\frac{k(k^2-1)(k^2-9)(k^2-25)}{1.2.3.4.5.6.7\ 2^6}\frac{4.5.6}{1.2.3}+\ldots=1,$$

k étant un nombre impair. On peut la représenter par

$$\sum(-1)^m\frac{k(k^2-1)(k^2-9)\ldots[k^2-(2m-1)^2]}{1.2.3\ldots(2m+1)\ 2^{2m}}$$
$$\times\frac{(m+1)(m+2)\ldots2m}{1.2.3\ldots m}=1.$$

En effet, si l'on pose

$$(1-z)^{-\frac{1}{2}}=b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3+\ldots,$$

b_0, b_1, b_2,..., désignant des coefficients numériques, on aura

$$\left[1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=b_0+b_1\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2+b_2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^4$$
$$+b_3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^6+\ldots,$$

et comme

$$\left[1-\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\frac{(1+t^2)^2-4t^2}{(1+t^2)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1+t^2}{1-t^2},$$

il est clair que le coefficient de t^{k-1} dans

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2m+2}-\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2m}\right]b_m,$$

est le même que celui de t^{k-1} dans

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}-\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2},$$

c'est-à-dire, dans $-\frac{1}{1+t^2}$. Mais, en vertu du résultat précédent, le coefficient de t^{k-1}, dans le développement de

$$b_m\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2m+2}-\frac{1}{1+t^2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{2m}\right],$$

est

$$-(-1)^{\frac{k-1}{2}+m}\cdot\frac{k(k^2-1)(k^2-9)\ldots[k^2-(2m-1)^2]}{1.2.3\ldots(2m+1)}\cdot b_m,$$

que nous représenterons par $-(-1)^{\frac{k-1}{2}}.\mathrm{K}_m b_m$; et, par suite, $-(-1)^{\frac{k-1}{2}}.\sum \mathrm{K}_m b_m$ est aussi le coefficient de la même puissance t^{k-1} dans le développement de $-\frac{1}{1+t^2}$. On aura donc

$$\sum \mathrm{K}_m b_m = 1,$$

puisque

$$-\frac{1}{1+t^2}=-1+t^2-t^4+t^6-t^8+\ldots$$

C'est là l'équation de M. Cauchy, car la formule du binôme donne

$$b_m = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{1.2.3.\ .m.2^m},$$

et il est évident que

$$1.2.3\ldots 2m = 1.3.5\ldots(2m-1).2.4.6\ldots 2m$$
$$= 1.3.5\ldots(2m-1).\ 2^m.1.2.3\ldots m,$$

d'où

$$1.3.5\ldots(2m-1).2^m = (m+1)(m+2)\ldots 2m,$$

et, par suite,

$$b_m = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots 2m}{1\ 2.3\ldots m.2^{2m}}.$$

On peut démontrer d'une manière semblable, pour toute valeur paire de k, l'équation

$$\sum(-1)^m \frac{k^2(k^2-4)(k^2-16)\ldots[k^2-(2m-2)]^2}{1.2.3\ldots 2m.2^{2m}}$$
$$\times \frac{(m+1)(m+2)\ldots 2m}{1.2.3\ldots m} = 0.$$

On a aussi, k étant impair,

$$\sum(-1)^m b_m \frac{(k^2-1)(k^2-9)\ldots[k^2-(2m-1)^2]}{1\ 2.3\ldots 2m} = (-1)^{\frac{k-1}{2}},$$

$$\sum(-1)^m b_m.2^{2m} \frac{k(k^2-1)(k^2-4)\ldots(k^2+m^2)}{1.2.3\ldots(2m+1)} = 1;$$

si k est pair,

$$\sum(-1)^m b_m \frac{k(k^2-4)(k^2-16)\ldots(k^2-4m^2)}{1.2.3\ldots(2m+1)} = 1-(-1)^{\frac{k}{2}},$$

$$\sum(-1)^m b_m.2^{2m} \frac{k(k^2-1)(k^2-4)\ldots(k^2-m^2)}{1.2.3\ldots(2m+1)} = 0;$$

et, pour toute valeur entière positive de k,

$$\sum (-1)^m b_m \cdot 2^{2m} \frac{k^2 (k^2-1)(k^2-4)\ldots[k^2-(m-1)^2]}{1.2.3\ldots 2m} = 0.$$

Dans ces formules, b_m a la valeur indiquée ci-dessus.