NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. FAURE

Solution de la question 242

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 161-167

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__161_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 242

(voir t. X, p. 358);

PAR M. H. FAURE.

Soit $T_{n+2} = 2T_{n+1} + T_n$ l'équation caractéristique d'une série récurrente : les deux premiers termes étant 1 et 3, aucun terme n'est un carré. (EULER.)

Si l'on développe la quantité $1 + \sqrt{2}$ élevée aux différentes puissances, la partie commensurable a pour valeur

(1) $\quad 1,\ 3,\ 7,\ 17,\ 41,\ 99,\ 239,\ 577,\ldots,$

tandis que les coefficients de $\sqrt{2}$ sont respectivement

(2) $\quad 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408,\ldots.$

Il est facile de s'assurer que ces deux suites de nombres forment deux séries récurrentes, qui ont pour échelle de relation les nombres 2 et 1. La première est la série dont il est question dans l'énoncé; la seconde jouit aussi de propriétés remarquables, que l'on signalera plus tard.

Soient x et y deux termes correspondants des séries (1) et (2), et posons, par exemple,

$$(1 + \sqrt{2})^n = x + y\sqrt{2}.$$

Nous aurons aussi

$$(1 - \sqrt{2})^n = x - y\sqrt{2};$$

d'où, en multipliant et supposant n pair,

$$1 = x^2 - 2y^2.$$

Si x pouvait être un carré z^2, on aurait

$$z^4 - 1 = 2y^2;$$

mais, d'après un théorème dû à M. Liouville (t. V, p. 73), la différence de deux bicarrés ne peut être le double d'un carré; donc déjà les termes de rang pair de la série ne peuvent être des carrés.

Si n est impair, on a

$$-1 = x^2 - 2y^2,$$

équation que l'on peut écrire ainsi,

$$y^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{2}\right),$$

et comme x est impair, $\frac{x+1}{2}$ et $\frac{x-1}{2}$ sont deux nombres entiers consécutifs; d'ailleurs, la somme de ces deux nombres est x : la question est donc ramenée à voir si, la somme des carrés de deux nombres entiers consécutifs étant un carré, la somme de ces deux nombres peut en être aussi un; autrement dit, les équations

$$a^2 + (a+1)^2 = t^2,$$
$$2a + 1 = u^2,$$

sont-elles compatibles? Il est facile de s'assurer qu'elles ne le sont pas, car si du carré de la seconde on retranche le double de la première, on trouve

$$u^4 - 2t^2 = 1,$$

équation impossible. Donc aucun terme de la série (1) n'est un carré.

Remarque I. Si l'on forme le terme général de la série (1), on trouve facilement, pour la valeur du terme T_n,

$$T_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}.$$

Or, si l'on développe cette expression au moyen de la formule du binôme, les termes irrationnels se détruiront, tandis que les autres s'ajouteront; on aura donc, après avoir divisé par 2,

$$T_n = 1 + \frac{n(n-1)}{1.2} 2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} 2^2 + \ldots.$$

On peut donc dire que, quelle que soit la valeur que l'on donnera à n, jamais cette expression ne pourra devenir un carré.

Remarque II. La démonstration précédente prouve qu'en considérant les termes de rang pair de la série (1), le carré de chacun d'eux, diminué de 1, est le double du carré du terme correspondant de la série (2), et qu'au contraire, si au carré d'un terme de rang impair on ajoute l'unité, on forme le double du carré du terme correspondant de la série (2).

D'après une autre décomposition, si l'on ne considère que les termes de rang impair de la série (2), le carré de chacun d'eux est la somme de deux carrés consécutifs; ainsi :

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1^2 + 0^2, \\ 5^2 &= 3^2 + 4^2, \\ \overline{29}^2 &= \overline{20}^2 + \overline{21}^2, \\ \overline{169}^2 &= \overline{119}^2 + \overline{120}^2, \\ \overline{985}^2 &= \overline{696}^2 + \overline{697}^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

de plus, la somme des racines des quantités placées dans le second membre doit former le terme de rang impair correspondant dans la série (1); ainsi :

$$\begin{aligned} 1 + 0 &= 1, \\ 3 + 4 &= 7, \\ 20 + 21 &= 41, \\ 109 + 120 &= 239, \\ 696 + 697 &= 2393, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Considérons, d'un autre côté, cinq termes consécutifs a, b, c, d, e de la série (2); on a :

$$\begin{aligned} e &= 2d + c, \\ d &= 2c + b, \\ c &= 2b + a. \end{aligned}$$

Éliminant b et d, on trouve

$$e = 6c - a;$$

telle est donc la relation qui existera entre trois termes consécutifs de la série obtenue, en ne considérant que les termes de rang impair dans la série (2). On peut donc énoncer ce théorème : *Si* $T_{n+2} = 6T_{n+1} - T_n$ *est l'équation caractéristique d'une série récurrente dont les deux premiers termes sont* 1 *et* 5, *le carré de chaque terme est la somme de deux carrés entiers consécutifs.*

Remarque III. Aucun terme de la série (2) ne peut être un carré : théorème analogue à celui qui était proposé.

Remarque IV. Le terme général de la série (2) est

$$T'_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1+\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}},$$

ou bien, en développant,

$$T'_n = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\,2^2 + \ldots;$$

donc, quelle que soit la valeur donnée à n, jamais cette expression ne pourra devenir un carré.

Remarque V. Considérons dans les séries (1) et (2) seulement les termes de rang pair; nous aurons les nombres

$$3,\quad 17,\quad 99,\quad 577,\ldots,$$
$$2,\quad 12,\quad 70,\quad 408,\ldots;$$

chaque terme de la première série, augmenté ou diminué de l'unité, deviendra un carré.

Car, soient toujours x et y deux termes correspondants de nos nouvelles séries, ils auront entre eux la relation

$$x^2 - 2y^2 = 1;$$

d'ailleurs

$$(1+\sqrt{2})^n = x + y\sqrt{2}.$$

Élevant au carré,

$$(1-\sqrt{2})^{2n} = x^2 + 2y^2 - 2xy\sqrt{2};$$

de sorte que si x est le terme de rang n, $x^2 + 2y^2$, que nous désignerons par T_{2n}, sera le terme de rang $2n$; on aura donc

$$T_{2n} - 1 = x^2 + 2y^2 - 1 = (2y)^2.$$

En donnant à n toutes les valeurs possibles, on voit que si l'on diminue d'une unité chaque terme de rang pair de nos nouvelles séries, on forme un carré. Pour avoir les termes de rang impair d'une manière analogue, il faut considérer x et y comme étant des termes de rang impair des séries (1) et (2); on a alors

$$x^2 - 2y^2 = -1,$$

par suite

$$T_{2n} + 1 = x^2 + 2y^2 + 1 = (2y)^2.$$

Remarque VI. Puisque $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, on a

$$\frac{x^2}{y^2} = 2 \pm \frac{1}{y^2},$$

et comme y peut surpasser toute valeur assignable, il s'ensuit que la limite des fractions

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ldots,$$

que l'on obtient en divisant chaque terme de la série (1) par son correspondant de la série (2), que cette limite, dis-je, est $\sqrt{2}$, résultat connu depuis longtemps.

Mais ce que l'on n'a peut-être pas remarqué, c'est que le rapport

$$\frac{1+3+7+17+41+\ldots}{1+2+5+12+19+\ldots}$$

est égal à 2. Cela se voit aisément, car la série (1) est donnée par la fraction

$$\frac{1 + x}{1 - 2x - x^2},$$

tandis que la série (2) est donnée par la fraction

$$\frac{1}{1 - 2x - x^2};$$

leur rapport est $1 + x$ et devient 2 pour $x = 1$.