NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÖPEL

Sur l'extension d'un théorème de Legendre et d'un théorème de Fermat

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 136-140

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__136_1>

SUR L'EXTENSION D'UN THÉORÈME DE LEGENDRE ET D'UN THÉORÈME DE FERMAT;

PAR GÖPEL.

Legendre a démontré que, A étant un nombre premier de la forme $\dot{4}+1$, si l'on réduit en fraction continue

(*) Nous regrettons de n'être pas autorisé à nommer la bienveillante personne qui nous a procuré ce renseignement.

$\sqrt{A}$, la période symétrique des dénominateurs a deux termes moyens égaux. Si les quotients *complets* correspondants sont

$$\frac{\sqrt{A}+I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

on a

$$D = D' \quad \text{et} \quad A = I'^2 + D^2;$$

ce qui démontre, en même temps, le théorème de Fermat, que tout nombre premier de la forme $\dot{4}+1$ est décomposable en deux carrés (page 45).

Göpel, dans une Dissertation soutenue en mars 1835, pour obtenir le grade de docteur à l'université de Berlin, et sous le titre : *De æquationibus secundi gradus indeterminatis,* démontre les théorèmes suivants :

a. A *étant un nombre premier de la forme* $\dot{4}+3$ *ou le double d'un tel nombre premier; réduisant* $\sqrt{A}$ *en fraction continue, on parvient à ces trois quotients complets,*

$$\frac{\sqrt{A}+I'}{D^0}, \quad \frac{\sqrt{A}-I}{D}, \quad \frac{\sqrt{A}+I'}{D'},$$

dans lesquels D *est égal soit à* $\frac{1}{2}D^0$, *soit à* $\frac{1}{2}D'$, *soit à* $\frac{1}{2}(D^0+D')$; *dans les deux premiers cas, on a*

$$A = I^2 + 2D^2,$$

et dans le troisième cas,

$$A = \frac{1}{4}(I-I')^2 + 2D^2 = \frac{1}{16}(D^0-D')^2 + 2D^2,$$

où $I - I'$ *est toujours divisible par* 2, *et* $D^0 - D'$ *divisible par* 4.

b. A *étant un nombre premier de la forme* $\dot{8}+7$ *ou* *le double d'un tel nombre premier, si l'on réduit $\sqrt{A}$ en fraction continue, on parvient à deux quotients complets consécutifs :*

$$\frac{\sqrt{A}+I^{o}}{D^{o}}, \quad \frac{\sqrt{A}+I}{D} \quad \text{ou} \quad D+D^{o}=2I,$$

et

$$A=2I^{2}-\frac{1}{4}(D-D^{o})^{2} \quad \text{et} \quad D-D^{o}$$

est toujours pair.

Ainsi, en résumé, tout nombre premier est, ou la somme de deux carrés, ou la somme d'un carré plus le double d'un carré, ou bien encore le double d'un carré moins un carré. Mais lorsqu'un nombre premier est la somme de deux carrés, il est nécessairement de la forme $\dot{4}+1$; cette réciproque ne subsiste pas pour les autres nombres premiers.

Adolphe Göpel est né à Rostock en septembre 1812; son père, Saxon d'origine, était professeur de musique. Un oncle maternel, consul anglais en Corse, fit venir Göpel, à l'âge de dix ans, en Italie. L'oncle apprit à son neveu les premiers éléments des sciences, et, pendant un séjour à Pise, en 1825 et 1826, Göpel fréquenta l'université, et suivit les cours d'analyse, de mécanique et de calcul différentiel; en 1827, de retour à Rostock, après avoir été deux années au gymnase de cette ville, il vint à l'université de Berlin. Il saisit avec ardeur l'occasion d'acquérir des connaissances variées, et, outre les cours de mathématiques, de physique et de chimie, il suivit encore les cours de philosophie, de philologie, d'esthétique et d'histoire. Ce n'est qu'à la fin de ses études universitaires, qu'il se livra spécialement aux mathématiques, principalement à cette partie vers laquelle sont entraînés ceux qui sont appelés à *cultiver la science pure,* à la théorie des nombres. Après sa thèse, en 1835, durant douze années il n'a rien publié, à l'exception de quelques articles dans le Journal de Grunnert, publié à Greisswalde, et dont il corrigeait les épreuves. Dans un de ces articles il démontre que si, dans l'équation

$$\left(\frac{x+\sqrt{y}}{p}\right)^n = \mathrm{P}+\sqrt{\mathrm{Q}},$$

où x, y, n, p, P, Q sont des nombres entiers, p est différent de l'unité, et si x, y, p n'ont pas de diviseur commun, on a toujours $p = 2$, $n = 3$, ou un multiple de 3. Il était aussi familiarisé avec la méthode synthétique de Steiner.

Dans le tome XXXVI de Crelle (page 317), 1848, on trouve un Mémoire posthume (1844) de Göpel, sur la projectivité des sections coniques comme figures courbes, selon la méthode dite *synthétique*. Peu de temps avant sa mort, il remit à M. Crelle, en mars 1847, un Mémoire sur les fonctions abéliennes : *Theoriæ transcendentium abelianarum primi ordinis adumbratio levis* (*); là, il résout un des problèmes les plus importants de la science contemporaine, et trouve la forme explicite des fonctions inverses.

Supposons qu'on donne les deux équations différentielles,

$$\int \frac{(\alpha+\beta y)\,dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}} + \int \frac{(\alpha+\beta y')\,dy'}{\sqrt{\mathrm{Y}'}} = \nu,$$

$$\int \frac{(\alpha'+\beta' y)\,dy}{\sqrt{\mathrm{Y}}} + \int \frac{(\alpha'+\beta' y')\,dy'}{\sqrt{\mathrm{Y}'}} = \nu',$$

où Y et Y$'$ sont des fonctions entières des variables y et y' du cinquième degré; il s'agit de trouver y et y'. C'est ce

(*) Inséré dans le Journal de M. Crelle, t. XXXV, p. 277; 1847.

dernier travail posthume qui a attiré l'attention de Jacobi, qui fait un grand éloge de l'ouvrage et de l'auteur (*).

Göpel, ayant un modeste emploi à la Bibliothèque de Berlin, menait une vie très-retirée, très-méditative, et cultivait la musique théorique ainsi que la musique pratique, dans laquelle il avait acquis un notable talent d'exécution; ce qui n'est pas rare chez les géomètres : la musique est, pour ainsi dire, l'arithmologie de l'oreille, et l'on comprend l'enthousiasme qu'inspirait cet art divin aux philosophes de l'antiquité hellénique. Göpel étant peu visiteur, nous voyons pourquoi sa thèse si remarquable est restée presque ignorée des grands géomètres de Berlin. Nous donnons ceci comme une explication, et non comme une excuse. Lorsqu'on découvre une étincelle du feu sacré chez un jeune homme, il faut aller au-devant de lui, et ne pas attendre qu'il vienne. C'est contraire à l'étiquette, j'en conviens, mais conforme à la morale, qui prime toute étiquette. Göpel est le cinquième arithmologue de ce siècle que la mort ait moissonné dans la force de l'âge et du talent. Galois, Abel, Göpel, Jacobi, Eisenstein se sont succédé dans la tombe. Göpel est mort en septembre 1847; sa Dissertation inaugurale est insérée dans le Journal de Crelle, tome XLV, pages 1-14, 1852; et, selon l'usage adopté en Allemagne, Göpel y donne son *curriculum vitæ*, d'où la Notice précédente est tirée : excellent usage, qui devrait être prescrit en France; ce serait un document souvent indispensable pour l'histoire littéraire.

(*) Journal de M. Crelle, t. XXXV, p. 316; 1847.