NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. MANNHEIM

Lieu des centres des circonférences coupant sous des angles égaux trois circonférences données

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 113-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__113_0>

LIEU DES CENTRES DES CIRCONFÉRENCES COUPANT SOUS DES ANGLES ÉGAUX TROIS CIRCONFÉRENCES DONNÉES;

PAR M. A. MANNHEIM,

Lieutenant d'artillerie.

Lemme 1. Deux petits cercles d'une sphère peuvent toujours être considérés comme l'intersection, avec cette sphère, de deux surfaces coniques.

Lemme 2. Tout plan, mené par l'un des sommets de ces surfaces coniques, coupe la sphère suivant un cercle faisant, avec les petits cercles dont nous avons parlé, des angles égaux.

Lemme 3. Trois petits cercles d'une sphère, pris deux à deux, donnent lieu à six surfaces coniques, dont les intersections avec la sphère donnée sont les trois petits cercles.

Lemme 4. Parmi les sommets de ces surfaces coniques, trois sont dans l'intérieur de la sphère, trois à l'extérieur.

Lemme 5. Les trois sommets extérieurs sont en ligne droite; deux sommets intérieurs sont en ligne droite avec un sommet extérieur; ce qui fait quatre droites sur lesquelles sont les six sommets.

Lemme 6. Par une droite donnée on mène des plans; les plans coupent une sphère suivant des cercles; le lieu des sommets des cônes touchant la sphère suivant ces cercles, est une ligne droite.

Lemme 7. Propriétés des projections stéréographiques: Tout cercle tracé sur la sphère se projette suivant un cercle.

Les projections de deux cercles se coupent sous un angle égal à celui des deux cercles.

Le centre de la projection d'un cercle est la projection du sommet du cône circonscrit à la sphère.

Ces lemmes posés, considérons trois petits cercles d'une sphère et les surfaces coniques dont les intersections avec cette sphère sont ces petits cercles.

Par l'une des droites des sommets de ces surfaces coniques, menons des plans; ils coupent la sphère suivant des cercles.

D'après le lemme 2, ces cercles font avec les trois petits cercles des angles égaux.

D'après le lemme 6, le lieu des sommets des cônes touchant la sphère suivant ces cercles est une droite.

Projetons stéréographiquement la figure que nous venons d'obtenir, et nous aurons le théorème suivant :

Le lieu des centres des cercles coupant sous des angles égaux trois cercles donnés dans un plan, se compose de quatre droites.

Il y a quatre droites, parce qu'il y a quatre lignes de sommets.

On peut ajouter : les quatre droites qui composent ce lieu passent par un même point; ce point est le centre radical des cercles donnés et ces droites sont perpendiculaires aux droites des sommets.

Nous laissons à chercher la démonstration de cette dernière partie.

Par ce qui précède, on trouvera aussi facilement une démonstration du problème proposé au grand concours d'élémentaires, en 1851 (t. X, p. 318), en remarquant que deux cercles peuvent être considérés comme les projections orthogonales ou stéréographiques de deux sections circulaires d'une surface conique.

Note. Écrivons les équations de trois sphères, en prenant un point d'*égale puissance* pour origine et les axes rectangulaires:

$$z^2+y^2+x^2-2(\gamma' z+\beta' y+\alpha' x)+f=0,$$
$$z^2+y^2+x^2-2(\gamma'' z+\beta'' y+\alpha'' x)+f=0,$$
$$z^2+y^2+x^2-2(\gamma''' z+\beta''' y+\alpha''' x)+f=0;$$

les α, β, γ sont les coordonnées respectives des centres, et

$$\begin{aligned} f &= \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2-r'^2,\\ &= \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2-r''^2,\\ &= \alpha'''^2+\beta'''^2+\gamma'''^2-r'''^2; \end{aligned}$$

les r sont les rayons respectifs des sphères.

Soit une quatrième sphère, rencontrant ces trois sphères sous des angles égaux; représentons cette sphère par l'équation

$$z^2+y^2+x^2-2(\gamma z+\beta y+\alpha x)+f'=0, \quad \text{où} \quad f'=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2.$$

Écrivant l'égalité des cosinus des angles sous lesquels cette sphère coupe les trois autres, on obtient les deux équations

$$r''[f+f'-2(\gamma'\gamma+\beta'\beta+\alpha'\alpha)]=r'[f+f'-2(\gamma''\gamma+\beta''\beta+\alpha''\alpha)],$$
$$r'''[f+f'-2(\gamma'\gamma+\beta'\beta+\alpha'\alpha)]=r'[f+f'-2(\gamma'''\gamma+\beta'''\beta+\alpha'''\alpha)].$$

Éliminant $f+f'$, on obtient

$$\text{(A)}\qquad \left\{\begin{aligned} &\gamma[\gamma'(r''-r''')+\gamma''(r'''-r')+\gamma'''(r'-r'')]\\ &+\beta[\beta'(r''-r''')+\beta''(r'''-r')+\beta'''(r'-r'')]\\ &+\alpha[\alpha'(r''-r''')+\alpha''(r'''-r')+\alpha'''(r'-r'')] \end{aligned}\right\}=0.$$

L'état du problème n'est pas changé, en prenant négativement r', ou r'', ou r''', ou bien deux de ces quantités; on a donc quatre solutions, et le lieu du centre de la sphère est dans quatre plans; chaque plan passe par un point quelconque d'égale puissance, et, comme tous ces points sont sur une droite, il s'ensuit que les plans se coupent suivant l'axe radical et sont perpendiculaires au plan des centres. Lorsque quatre sphères sont données, le lieu des centres est un système de seize droites.

Supposons que quatre sphères soient données et qu'il s'agisse de trouver le centre de la sphère qui les rencontre sous un angle nul. Représentons deux plans, lieux des centres, par les équations

$$(1)\qquad A\alpha+B\beta+C\gamma=0,$$
$$(2)\qquad A'\alpha+B'\beta+C'\gamma=0.$$

On a, en outre, les deux équations

$$(a)\qquad (\alpha-\alpha')^2+(\beta-\beta')^2+(\gamma-\gamma')^2=(r+r')^2,$$
$$(b)\qquad (\alpha-\alpha'')^2+(\beta-\beta'')^2+(\gamma-\gamma'')^2=(r+r'')^2;$$

ces deux équations donnent

$$(3)\qquad A''\alpha + B''\beta + C''\gamma = 2r(r' - r'') + r'^2 - r''^2,$$
$$A'' = 2(\alpha'' - \alpha'),\quad B'' = 2(\beta'' - \beta'),\quad C'' = 2(\gamma'' - \gamma').$$

Les équations (1), (2), (3) donnent

$$\alpha = Mr + N,\quad \beta = M'r + N',\quad \gamma = M''r + N'';$$

les M, N sont des quantités connues. Substituant ces valeurs dans une des deux équations (a), (b), on obtient une équation du second degré en r. On a ainsi la solution du problème de Fermat sur une sphère qui en touche quatre autres, et aussi la solution du problème de Viète sur un cercle qui en touche trois autres: la marche du raisonnement est la même pour les deux problèmes.

r', r'', r''' étant positifs, la droite des sommets des cônes, tangents aux sphères dont les centres sont dans le plan xy, a pour équation

$$(a)\qquad My - M'x = N,$$
$$M = \alpha'(r'' - r''') + \alpha''[r''' - r'] + \alpha'''[r' - r''],$$
$$N = r''[\alpha'\beta'''] + r'''[\alpha''\beta'] + r'[\alpha'''\beta'],$$

les crochets désignent des binômes alternés; on déduit M′ de M en changeant α en β. Faisant $\gamma = 0$ dans l'équation du plan (A), on a

$$(b)\qquad M\beta + M'\alpha = 0;$$

donc les droites (a) et (b) sont perpendiculaires. Ainsi les traces des quatre plans sur le plan des centres sont respectivement perpendiculaires aux lignes des sommets.