NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P. LECOINTE

Démonstration élémentaire d'une propriété de la projection stéréographique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 12 (1853), p. 101-102

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1853_1_12__101_1>

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE D'UNE PROPRIÉTÉ DE LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE;

PAR LE P. LECOINTE S.-J.,
Professeur au Collége Saint-Michel, à Saint-Étienne.

Dans le tome VII, page 272, du *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, M. Chasles a donné une démonstration de la propriété de la projection stéréographique, qui consiste en ce que *le centre de la projection d'un cercle est la projection du sommet du cône circonscrit à*

(*) Dans plusieurs Traités estimables de Géométrie, on rencontre le mot *face* pris dans le sens d'*angle*, mais à tort; Euclide a raison, et avec lui Legendre et Lacroix.

la sphère suivant ce cercle, propriété qui revient au théorème suivant de Géométrie :

Un cercle quelconque étant tangent à une droite AB au point C, si TN, TN′ sont deux tangentes menées d'un même point T à ce cercle, N et N′ leurs points de contact respectifs, XX′ le diamètre du cercle parallèle à AB, n, n', t les points de rencontre des droites NC, N′C, TC avec XX′, on a

$$tn = tn'.$$

La démonstration du célèbre géomètre, quoique simple, peut encore recevoir une simplification, en ce qu'il n'est nullement nécessaire de recourir à la Trigonométrie, ainsi que nous allons le voir.

Soit I le second point de rencontre de TC avec la circonférence du cercle, et menons les cordes NI, N′I.

Les deux triangles NTI, NTC étant semblables, ainsi que les deux triangles N′TI, N′TC, on a

$$\frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{NC}} = \frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TC}}, \quad \frac{\mathrm{N'I}}{\mathrm{N'C}} = \frac{\mathrm{N'T}}{\mathrm{TC}} = \frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TC}};$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{NC}} = \frac{\mathrm{N'I}}{\mathrm{N'C}}.$$

Maintenant, les deux arcs CX, CX′ étant égaux comme interceptés entre parallèles, les deux triangles ntC, NCI sont semblables, ainsi que les deux triangles $n't$C, N′CI, et l'on a, par conséquent,

$$\frac{nt}{t\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{NI}}{\mathrm{NC}}, \quad \frac{n't}{t\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{N'I}}{\mathrm{N'C}};$$

d'où, en vertu de l'égalité (1),

$$nt = n't \ (^*). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

(*) *Voir* CATALAN, *Théorèmes et problèmes de Géométrie*, page 301