NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULLIEN

Solution de la question 60

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 80-83

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__80_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 60

(voir t. I, p. 395);

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,

Du séminaire de Vals.

I. *Question* 34. Si, d'un point situé sur une surface algébrique de degré m, on abaisse des perpendiculaires sur un système de plans fixes, le lieu géométrique des points de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est une surface algébrique du même degré m.

Solution. Soient

$$\begin{gathered}
A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\
A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A_n x + B_n y + C_n z + D_n = 0
\end{gathered}$$

(*) Un vocabulaire qui expliquerait les mots nouveaux introduits dans la science avec une si déplorable profusion serait une œuvre très-utile. TM.

un système de n plans,

$$M(x, y, z) = 0$$

une surface algébrique de degré m, et (x_0, y_0, z_0) l'un de ses points.

Les équations de la perpendiculaire abaissée du point (x_0, y_0, z_0) sur le plan

$$A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$$

sont

$$x - x_0 = \frac{A_k}{C_k}(z - z_0), \quad y - y_0 = \frac{B_k}{C_k}(z - z_0),$$

et les coordonnées du pied de la perpendiculaire sont

$$x_k = \frac{(B_k^2 + C_k^2) x_0 - A_k B_k y_0 - A_k C_k z_0 - A_k D_k}{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2},$$

$$y_k = \frac{-A_k B_k x_0 + (A_k^2 + C_k^2) y_0 - B_k C_k z_0 - B_k D_k}{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2},$$

$$z_k = \frac{-A_k C_k x_0 - B_k C_k y_0 + (A_k^2 + B_k^2) z_0 - C_k D_k}{A_k^2 + B_k^2 + C_k^2};$$

les coordonnées du centre de moyenne distance des pieds des perpendiculaires abaissées du même point (x_0, y_0, z_0) sur les n plans, ont pour valeurs

$$(1) \qquad x = \frac{1}{n}\sum x_k, \quad y = \frac{1}{n}\sum y_k, \quad z = \frac{1}{n}\sum z_k,$$

le symbole $\sum$ s'étendant aux valeurs $1, 2, 3, \ldots n$ de l'indice k.

Posant

$$A_k^2 + B_k^2 + C_k^2 = \Delta_k,$$

on peut écrire les relations (1) sous la forme

$$(2)\left\{\begin{aligned}
&x_0 \sum \frac{B_k^2 + C_k^2}{\Delta_k} - y_0 \sum \frac{A_k B_k}{\Delta_k} - z_0 \sum \frac{A_k C_k}{\Delta_k} = nx + \sum \frac{A_k D_k}{\Delta_k},\\
&- x_0 \sum \frac{A_k B_k}{\Delta_k} + y_0 \sum \frac{A_k^2 + C_k^2}{\Delta_k} - z_0 \sum \frac{B_k C_k}{\Delta_k} = ny + \sum \frac{B_k D_k}{\Delta_k},\\
&- x_0 \sum \frac{A_k C_k}{\Delta_k} - y_0 \sum \frac{B_k C_k}{\Delta_k} + z_0 \sum \frac{A_k^2 + B_k^2}{\Delta_k} = nz + \sum \frac{C_k D_k}{\Delta_k}.
\end{aligned}\right.$$

Ces dernières équations donnent des valeurs de x_0, y_0, z_0 linéaires et entières par rapport à x, y, z, et leur substitution dans

$$(3)\qquad M(x_0, y_0, z_0) = 0$$

fournit une équation de degré m,

$$(4)\qquad \mu(x, y, z) = 0,$$

représentant le lieu du centre de moyenne distance.

II. *Remarques.* Les formules métamorphiques (2) qui servent à passer de l'équation (3) à l'équation (4), ou inversement, expriment les variables de l'une des équations par des fonctions entières de celles de l'autre; par conséquent, à un point situé à l'infini sur l'une des surfaces, correspond un point situé à l'infini sur l'autre, ce qui pouvait être facilement prévu.

Les conditions auxquelles doivent satisfaire les plans donnés, pour que les deux surfaces soient homothétiques, se réduisent aux cinq suivantes :

$$\sum \frac{A_k B_k}{\Delta_k} = \sum \frac{A_k C_k}{\Delta_k} = \sum \frac{B_k C_k}{\Delta_k} = 0,$$

$$\sum \frac{B_k^2 + C_k^2}{\Delta_k} = \sum \frac{A_k^2 + C_k^2}{\Delta_k} = \sum \frac{A_k^2 + B_k^2}{\Delta_k}:$$

elles expriment, en effet, que les valeurs de x, y, z, données par les équations (2), sont de la forme

$$x = \rho x_0 + \alpha, \quad y = \rho y_0 + \beta, \quad z = \rho z_0 + \gamma.$$

III. Si le point (x_0, y_0, z_0) est assujetti à se trouver sur l'intersection de deux surfaces des degrés m et p, représentées par

$$\mathrm{M}(x, y, z) = 0,$$
$$\mathrm{P}(x, y, z) = 0;$$

substituant dans ces équations à x, y, z les valeurs de x_0, y_0, z_0, tirées des formules (2), on aura deux nouvelles équations des mêmes degrés m et p,

$$\mu(x, y, z) = 0,$$
$$\pi(x, y, z) = 0,$$

qui, considérées comme simultanées, représentent le lieu du centre de moyenne distance des pieds des perpendiculaires; ce lieu est donc l'intersection de deux surfaces des degrés m et p.

Le théorème qui nous occupe résulte de ce que les coordonnées du centre de moyenne distance de plusieurs points s'expriment par des fonctions linéaires et entières des coordonnées de ces points; par conséquent, ce théorème subsiste, lorsqu'on remplace le centre de moyenne distance par un autre point, dont les coordonnées sont des fonctions entières et linéaires de celles des pieds des perpendiculaires, comme serait le centre des distances proportionnelles.
