NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TH. LOXHAY

Solution de la question 237

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 463-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__463_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1852, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTION DE LA QUESTION 237;

PAR M. TH. LOXHAY,
Repetiteur a l'Ecole militaire de Belgique

L'énoncé doit être modifié de la manière suivante. Soit

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}, \quad n_q = \frac{n!}{(n-q)! \times q!};$$

on a

$$S_n - n_1 S_{n-1} + n_2 S_{n-2} - n_3 S_{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1} n_1 S_1 = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(ARNDT)

Solution. Si l'on développe la $n^{ième}$ puissance de $(x-1)$, on aura, en employant les notations indiquées dans l'énoncé de la question,

$$(x-1)^n = x^n - n_1 x^{n-1} + n_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} n_1 x + (-1)^n;$$

retranchant du second membre le développement de $(1-1)^n$, qui n'est autre chose que zéro, il en résultera

$$(x-1)^n = x^n - 1 - n_1(x^{n-1}-1) + n_2(x^{n-2}-1) + \ldots \\ + (-1)^{n-1} n_1 (x-1).$$

Divisant les deux membres par $(x-1)$, multipliant par dx, et intégrant entre les limites 0 et 1, on obtiendra

$$\int_0^1 (x-1)^{n-1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n-1}{x-1}\,dx - n_1 \int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{x-1}\,dx \\ + n_2 \int_0^1 \frac{x^{n-2}-1}{x-1}\,dx + \ldots + (-1)^{n-1} n_1 \int_0^1 dx;$$

mais

$$\int_0^1 \frac{x^n-1}{x-1}\,dx = S_n, \qquad \int_0^1 \frac{x^{n-1}-1}{x-1}\,dx = S_{n-1}, \ldots, \\ \int_0^1 dx = S_1.$$

Donc enfin,

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n} = S_n - n_1 S_{n-1} + n_2 S_{n-2} + \ldots + (-1)^{n-1} n_1 S_1.$$

Note. La formule est une application particuliere de la formule générale

$$\Delta^n y_0 = y_n - n_1 y_{n-1} + n_2 y_{n-2} - \ldots$$

(PROUHET)