Nouvelles annales de mathématiques

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 457-462

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__457_1>

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annonces dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

THÉORIE GÉNÉRALE DES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES, A L'USAGE DES CANDIDATS AUX ÉCOLES SPÉCIALES DU GOUVERNEMENT ; par *M. J. Vieille*, agrégé près la Faculté des Sciences de Paris, maître des conférences à l'École Normale, chevalier de la Légion d'honneur ; 1852 ; in-8° de 100 pages. (Imprimerie de Bachelier.)

Dieu seul est grand ! dit Bossuet. On peut ajouter que

Dieu seul connaît la vraie grandeur de toutes choses. L'homme, cet être éphémère, qui était hier un atome organique, qui sera demain un morceau de fumier, et qui est aujourd'hui un sot orgueilleux qui se croit quelque chose, εἶναί τι, comme dit l'Apôtre, l'homme ne possède l'appréciation exacte d'aucune grandeur. Qu'il pèse, qu'il mesure, qu'il calcule, les résultats sont entachés d'erreurs, approchent de la vérité, mais ne sont pas la vérité *vraie*, comme s'expriment les diplomates, avec cette différence, que le *fin* de la diplomatie consiste à s'éloigner le plus qu'on peut de la vérité vraie, tandis que le but constant du géomètre est de s'en approcher le plus strictement possible, en deçà et au delà, et de resserrer les deux limites de plus en plus. Une de ces limites donne une erreur par *excès* et l'autre par *défaut*. La somme de ces deux erreurs est évidemment égale à la différence des deux limites. Donc une de ces erreurs est moindre que la moitié de la différence des deux limites; il faut donc une première méthode pour rendre cette différence aussi petite que l'on veut. Lorsqu'on combine par les procédés arithmétiques plusieurs de ces quantités approchées, le résultat sera renfermé aussi entre deux limites. Une seconde méthode consiste à découvrir d'avance la différence de ces deux limites. Enfin, lorsque cette différence est prescrite, il faut une troisième méthode pour découvrir avec quel degré d'approximation il faut calculer les quantités à combiner pour que le résultat se trouve entre les limites prescrites. Ces trois méthodes sont l'objet principal de la *Théorie générale des approximations*.

Cette *théorie* consiste dans une exposition rigoureuse et complète de tout ce qu'on a écrit sur cette matière, avec de notables simplifications et améliorations, et augmentée de nouvelles considérations sur l'erreur *relative*. On appelle ainsi le quotient qu'on obtient en divisant l'erreur commise

sur une quantité par cette quantité. L'auteur dit avec raison : « C'est ce rapport seul, et non l'erreur *absolue*, qui
» caractérise nettement le degré d'approximation obtenu.
» Il ne suffirait pas de savoir, par exemple, que, dans la
» mesure d'une longueur, on a fait une erreur moindre
» que de 1 centimètre, pour en conclure que la mesure
» est bien prise ; car, tandis que cette erreur sera regar-
» dée comme négligeable pour une longueur de 10 mètres,
» la même erreur sera, au contraire, très-notable s'il
» s'agit d'une longueur de 1 mètre » (page 2).

Les divers théorèmes d'*approximation* appliqués aux opérations arithmétiques sont tous *implicitement* fondés sur ce qu'un nombre est un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de 10, en allant de gauche à droite, et que les coefficients sont des entiers positifs, ne pouvant avoir que les dix valeurs de *zéro* à *neuf*.

Voici le premier théorème : *Si un nombre est calculé avec m chiffres exacts, à partir du chiffre significatif k des plus hautes unités, l'erreur relative sera moindre que la fraction* $\frac{1}{k \cdot 10^{m-1}}$.

La démonstration revient à ceci : le nombre donné est de la forme

$$k \cdot 10^p + l \cdot 10^{p-1} + \ldots f 10^{p-m+1} + \ldots;$$

les m coefficients $k, l, \ldots, f$ sont exacts ; ceux qui suivent ne sont pas sûrs. Représentons cette partie non exacte par α ; c'est l'erreur ; on a évidemment

$$\alpha < 10^{p-m+1};$$

et le nombre cherché étant représenté par a, quel qu'il soit, on a

$$a > k \cdot 10^p.$$

Donc

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{k \cdot 10^{m-1}},$$

$\frac{\alpha}{a}$ est l'erreur relative, et à fortiori

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{10^{m-1}}.$$

Si l'on sait à priori que

$$\frac{\alpha}{a} < \frac{1}{(k+1)\,10^{m-1}},$$

on est sûr que les m chiffres sont exacts. En effet,

$$a < (k+1)\,10^{m-1};$$

donc

$$\alpha < 1.$$

C'est l'objet d'un second théorème.

L'auteur applique ces théorèmes aux quatre premières opérations de l'arithmétique, et donne des règles simples pour la multiplication et la division abrégées. Comme exemple d'addition, l'auteur calcule

$$\log 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \frac{1}{7.3^7} + \ldots\right)$$

et a égard : 1° aux termes négligés; 2° aux chiffres négligés dans la réduction des fractions en fractions décimales; 3° à la partie décimale qu'on néglige dans le résultat. Cela peut donner une idée de la marche sévère de l'auteur.

Dans la multiplication, on donne à calculer avec quatre chiffres exacts la longueur de la circonférence qui a pour rayon le côté du décagone régulier étoilé, inscrit dans le cercle dont le rayon est 1 (page 32), c'est-à-dire le nombre $\pi(\sqrt{5}+1)$.

Les exemples pour les extractions de racines sont : 1° calculer avec trois chiffres exacts l'expression $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; 2° $\sqrt[3]{\frac{374300}{\pi}}$ à une unité près.

L'auteur établit cette règle générale, de pratique facile : Dans tout calcul de multiplication, de division, d'élévation aux puissances, d'extraction de racines, si l'on veut que le résultat final présente m chiffres exacts, $m+2$ chiffres suffisent toujours pour chacun des termes ou des termes des facteurs qui entrent dans le produit (pages 23, 35, 46, 48).

Dans la division abrégée, l'erreur du quotient réduit à ses m premiers chiffres a pour limite une fraction de l'unité du $m^{iem.}$ chiffre, fraction marquée par $\frac{m-2}{100}$ (pages 39-43).

Toutes les approximations précédemment exposées dérivent d'une formule générale, fondée sur le théorème de Taylor (page 81). L'auteur applique cette formule générale à la règle de *fausse position*, et au calcul approché des racines des équations numériques, algébriques et transcendantes, et la méthode est rectifiée par la considération du terme $\frac{h^2}{1.2}\,\frac{f''(a+h\theta)}{f'a}$ (page 91). En regard de cette méthode, on a placé les formules de M. Cauchy, qui dispensent de toute hypothèse sur la dérivée seconde. L'auteur pense que ces formules ne sont pas préférables aux précédentes, que, du moins, il est des cas où elles ne fournissent pas une approximation aussi rapide.

On donne pour exemples : 1° l'emploi des parties proportionnelles dans le calcul par logarithmes ; 2° l'équation

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0,$$

une racine est comprise entre 1,80159 et 1,80195 ; 3°

$$\text{tang}\, x - x = 0, \quad x = 257^\circ\, 27',$$

à une demi-minute près.

Il aurait peut-être fallu donner quelques notions sur les méthodes d'approximation *graphiques* en usage dans les services publics.

Cet opuscule, de 100 pages, est un ouvrage plus instructif que certains gros volumes, où l'on trouve pléthore de paroles et maigreur de pensées.

En terminant, nous ferons observer que tous les procédés d'approximation exigent, dans chaque cas particulier, que le calculateur fasse usage de sagacité; faculté dont les règles ne dispensent pas, et qu'elles ne peuvent donner.