NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TISSOT

# Sur les hélices

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 11 (1852), p. 454-457

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__454_1>

# SUR LES HÉLICES;

PAR M. A. TISSOT,
Docteur ès sciences, ancien élève de l'École Polytechnique.

1. Pour que le lieu des centres de courbure d'une hélice H, tracée sur un cylindre, soit une autre hélice H', tracée sur un cylindre parallèle au premier, il faut et il suffit que la section droite de celui-ci soit un cercle ou une spirale logarithmique.

L'axe des $z$ étant parallèle aux génératrices, et les deux autres étant perpendiculaires entre eux et au premier, soient, pour un point quelconque de H :

$x$, $y$, $z$ ses coordonnées,
$x'$, $y'$, $z'$ celles du centre du cercle osculateur,
$\rho$ le rayon de courbure de la section droite.

On sait que le rayon de courbure de l'hélice est parallèle à ce dernier, et qu'il a pour longueur $\rho(1+\tang^2\alpha)$, $\alpha$ désignant le complément de l'angle sous lequel H coupe les arêtes du cylindre; on a donc

$$z' = z \quad \text{et} \quad (x'-x)^2+(y'-y)^2 = (1+\tang^2\alpha)^2\rho^2,$$
$$(x'-x)\,dx+(y'-y)\,dy = 0.$$

Si l'on pose

$$ds^2 = dx^2+dy^2, \quad ds'^2 = dx'^2+dy'^2,$$

ces équations donneront

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = x - (1 + \text{tang}^2\alpha)\rho\,\dfrac{dy}{ds}, \\[2mm] y' = y + (1 + \text{tang}^2\alpha)\rho\,\dfrac{dx}{ds}; \end{cases}$$

d'où l'on tire, en différentiant, puis en ajoutant membre à membre, après avoir élevé au carré,

$$(2)\qquad ds'^2 = \text{tang}^4\alpha\, ds^2 + (1 + \text{tang}^2\alpha)^2\, d\rho^2.$$

D'ailleurs, pour que le lieu des centres de courbure de H soit une autre hélice, dont la tangente fasse avec le plan des $xy$ un angle constant $\alpha'$, il faut qu'on puisse satisfaire à la condition

$$dz' = \text{tang}\,\alpha'\, ds';$$

et, comme on a

$$dz' = dz, \quad dz = \text{tang}\,\alpha\, ds,$$

cette condition donne

$$(3)\qquad ds' = \text{tang}\,\alpha\ \text{cotang}\,\alpha'\, ds.$$

On voit donc, à l'aide des équations (2) et (3), que, si l'on pose

$$k^2(1 + \text{tang}^2\alpha)^2 = \text{tang}^2\alpha\,(\text{cotang}^2\alpha' - \text{tang}^2\alpha),$$

il faudra qu'on ait

$$(4)\qquad d\rho = k\, ds.$$

Ainsi, à partir de l'origine des arcs, le rayon de courbure de la section droite du cylindre doit croître proportionnellement à la longueur de ces arcs.

2. Soit

$$(5)\qquad dy = p\, dx;$$

si l'on introduit, dans l'équation (4), les expressions

$$\rho = (1 + p^2)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{dp}, \quad ds = \sqrt{1 + p^2}\, dx,$$

et qu'on prenne $p$ pour variable indépendante, elle deviendra

$$(1+p^2)\frac{d^2x}{dp^2}+(3p-k)\frac{dx}{dp}=0;$$

d'où l'on tire, en ayant égard à l'équation (5) et en représentant par $c$, $c'$, $c''$ trois constantes arbitraires,

$$x-c'=c\,\frac{p+k}{\sqrt{1+p^2}}\,e^{k\,\mathrm{arc\,tang}\,p},$$

$$y-c''=c\,\frac{kp-1}{\sqrt{1+p^2}}\,e^{k\,\mathrm{arc\,tang}\,p}.$$

Si l'on divise membre à membre, et qu'on choisisse l'origine des coordonnées de manière à faire disparaître $c'$ et $c''$, on aura donc

$$\frac{x}{y}=\frac{p+k}{kp-1},$$

ou bien, en remplaçant $p$ par $\frac{dy}{dx}$, et en introduisant les coordonnées polaires,

$$dr=krd\theta.$$

Cette équation a pour intégrale

$$r=\mathrm{R}e^{k\theta},$$

R étant une nouvelle constante; elle représente, par conséquent, une spirale logarithmique. Pour $k=0$, c'est-à-dire pour $\alpha'=90^\circ-\alpha$, elle donne un cercle.

3. Si l'on remplace, dans les équations (1), $x$ et $y$ par leurs valeurs, en fonction de $r$ et de $\theta$, déduites de ce qui précède, il viendra

$$x'=-(1+\mathrm{tang}^2\alpha)\,(k\sin\theta+\sin^2\alpha\cos\theta)\,r,$$

$$y'=(1+\mathrm{tang}^2\alpha)\,(k\cos\theta-\sin^2\alpha\sin\theta)\,r.$$

De ces nouvelles expressions, on peut conclure facilement que, $k$ étant différent de zéro, la section droite du cylindre, sur lequel se trouve placée la seconde hélice H′, est une spirale logarithmique de forme identique avec la première et ayant même pôle.

Il en résulte que les deux hélices sont situées sur deux cônes de révolution, dont les axes et les sommets coïncident, et dont les compléments $\lambda$ et $\lambda'$ des demi-angles au sommet satisfont à la relation

$$\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\lambda' = \text{tang}\,\alpha'\ \text{tang}\,\lambda\,;$$

car, en appelant $\omega$ l'angle que fait, dans les deux spirales, la tangente en un point quelconque de la courbe, avec la ligne qui joint ce point au pôle, on doit avoir

$$\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\lambda\cos\omega,$$

$$\text{tang}\,\alpha' = \text{tang}\,\lambda'\cos\omega.$$

Enfin, si la première hélice coupe les génératrices du cône sous l'angle de 45 degrés, il en sera de même de la seconde, et les deux cônes se confondront; on aura alors

$$\alpha = \alpha', \quad \lambda = \lambda', \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\lambda, \quad k^2 = \cos 2\alpha.$$