Nouvelles annales de mathématiques

JULLIEN

Solution de la question 195 (Plucker)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 398-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__398_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 195 (PLUCKER)

(voir t VII, p 368),

PAR M. L'ABBÉ JULLIEN,
Du séminaire de Vals.

THÉORÈME. *Trois cercles étant donnés dans un même plan ; construisant un cercle coupant rectangulairement l'un des deux cercles donnés, et passant par les intersections des deux autres ; les trois nouveaux cercles passent par les deux mêmes points.*

Démonstration. Soient A, B, C les centres des cercles donnés, r_α, r_β, r_γ leurs rayons, A_1, B_1, C_1 les centres des nouveaux cercles ; les mêmes lettres se rapportant aux cercles qui se coupent rectangulairement.

Prouvons que les axes radicaux des cercles A_1, B_1, C_1 ont un point commun non situé à l'infini ; de plus, que les centres de ces cercles sont en ligne droite, et le théorème sera démontré.

Les axes radicaux des cercles A et B_1, A et C_1 concourent au centre radical des cercles A, B, C ; donc l'axe radical des cercles B_1 et C_1 passe en ce point. On démontre de même que les deux autres axes radicaux des cercles A_1, B_1, C_1 passent en ce point.

Appliquons le théorème des transversales au triangle ABC, et, pour cela, déterminons le segment A_1C.

A_1, B_1, C_1 sont respectivement les côtés BC, AC, AB du triangle ABC, représentés par a, b, c.

Représentant par E, D les intersections des cercles B et C, par F la rencontre de la corde ED avec la droite BC, et par G le pied d'une perpendiculaire abaissée de A sur cette même droite BC, on a

$$\overline{A_1D}^2 = \overline{A_1F}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{A_1C}^2 + 2A_1C \times CF + r_\gamma^2$$
$$= \overline{A_1C}^2 + A_1C \frac{r_\gamma^2 - r_\beta^2 + a^2}{a} + r_\gamma^2,$$

$$(1)\ \overline{A_1A}^2 = r_\alpha^2 + \overline{A_1D}^2 = \overline{A_1C}^2 + A_1C \frac{r_\gamma^2 - r_\beta^2 + a^2}{a} + r_\alpha^2 + r_\gamma^2.$$

D'un autre côté,

$$(2)\ \overline{A_1A}^2 = \overline{A_1C}^2 \pm 2A_1C \times CG + b^2 = \overline{A_1C}^2 + A_1C \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} + b^2.$$

Égalant les seconds membres des égalités (1) et (2), on obtient

$$A_1C = \frac{a(b^2 - r_\alpha^2 - r_\gamma^2)}{c^2 - b^2 + r_\gamma^2 - r_\beta^2},$$

puis, en vertu de la symétrie, et par permutation tournante,

$$B_1A = \frac{b(c^2 - r_\beta^2 - r_\alpha^2)}{a^2 - c^2 + r_\alpha^2 - r_\gamma^2},$$
$$C_1B = \frac{c(a^2 - r_\gamma^2 - r_\beta^2)}{b^2 - a^2 + r_\beta^2 - r_\alpha^2}.$$

On en déduit

$$A_1B = A_1C + a = \frac{a(c^2 - r_\beta^2 - r_\alpha^2)}{c^2 - b^2 + r_\gamma^2 - r_\beta^2},$$
$$B_1C = \frac{b(a^2 - r_\gamma^2 - r_\beta^2)}{b^2 - a^2 + r_\alpha^2 - r_\gamma^2},$$
$$C_1A = \frac{c(b^2 - r_\alpha^2 - r_\gamma^2)}{c^2 - b^2 + r_\beta^2 - r_\alpha^2};$$
$$A_1C \times B_1A \times C_1B = A_1B \times B_1C \times C_1A.$$

Les centres A_1, B_1, C_1 sont donc en ligne droite.

Il est à remarquer que les six cercles A, B, C, A_1, B_1, C_1

peuvent être considérés de quatre manières différentes, comme partagés en deux groupes de trois cercles, ayant entre eux les mêmes relations que les cercles A, B, C, et A_1, B_1, C_1.