NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FRANÇOIS-PHILIBERT GARNIER

Grand concours (année 1851)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 390-393

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__390_1>

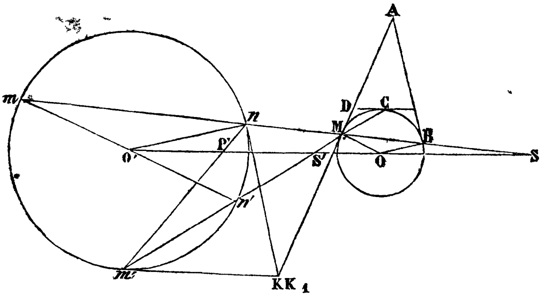
GRAND CONCOURS (ANNEE 1851);

PAR M. GARNIER (FRANÇOIS-PHILIBERT),

Ne a Paris, le 15 juillet 1835, Eleve du lycee Bonaparte, classe de Mathematiques elementaires, deuxieme division, professeur M. Amiot, Institution Carre-Demailly

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES (PREMIER PRIX).

Étant donnés deux cercles o et o' qui ne se touchent pas, mais qui peuvent se couper ou ne pas se couper, indifféremment, de chaque point M, de l'un o, on mène deux droites aux centres de similitude S et S' des deux cercles ; ces droites rencontrent l'autre cercle o' en quatre points m, n, m', n' ; on demande de prouver que deux de ces points sont sur un diamètre du cercle o', et les deux autres sur une droite qui passe toujours par un point fixe, quel que soit le point M pris sur le cercle o.



Je dis d'abord que deux des points m, n, m', n' sont sur un diamètre de o'; je joins oM. Ce rayon est parallèle aux deux rayons $o'm$, $o'n'$ de la circonférence o', d'après la définition même des centres de similitude. On a donc du point o' deux rayons parallèles à une même direction, et, par conséquent, ces rayons sont le prolongement l'un de l'autre; sans quoi, du point o' on pourrait mener deux parallèles à une même droite, ce qui est impossible. Donc la droite mn' est un diamètre de o'.

Je dis, en second lieu, que les deux autres points n et m' sont sur une droite qui passe par un certain point fixe, que l'on peut déterminer.

Par les points n et m' je mène deux tangentes au cercle o', et par M une tangente à o. Les tangentes en n et en M se rencontrent évidemment. J'appelle K leur point de rencontre, et je dis que c'est un point de l'axe radical des deux cercles.

En effet, je mène des tangentes par les points B et C. Les deux triangles nKM et MBA sont semblables; car les angles en M sont égaux comme opposés au sommet; et les droites AB, Kn étant parallèles comme perpendiculaires à des rayons parallèles oB, $o'n$, les angles A et

nKM sont égaux. Or le triangle ABM est isocèle; car AM et AB sont deux tangentes au cercle o. Donc aussi KnM est isocèle, et l'on a Kn = KM. Par conséquent, K est d'égale puissance par rapport aux deux cercles o et o'; donc c'est un point de l'axe radical de ces deux cercles.

Si l'on considère maintenant la tangente en m', on voit qu'elle rencontre aussi la tangente en M, en un point que j'appellerai K_1. On prouve, comme précédemment, que K_1 est un point de l'axe radical des deux cercles; car les triangles $m'K_1M$ et MDC sont semblables, puisque DC et $m'K_1$ sont parallèles, comme perpendiculaires à des rayons parallèles. Or DM = DC, comme tangentes issues d'un même point; donc $K_1m' = K_1m$. Donc K_1 est aussi un point de l'axe radical des deux cercles.

Les points K et K_1 se trouvent tous les deux sur l'axe radical. Ils se trouvent aussi sur la tangente en M : mais cette tangente ne peut rencontrer l'axe radical qu'en un point; donc K et K_1 se confondent. Les tangentes en m' et en n se rencontrent donc en un point de l'axe radical des deux cercles o et o'.

Or le point K est le pôle de $m'n$ par rapport à o', puisque c'est le point de rencontre des tangentes menées par les extrémités de cette corde. Et comme le point M est quelconque sur o, il en résulte que le lieu des pôles, par rapport à o', des droites $m'n$, est l'axe radical des deux circonférences o et o'. Donc, toutes les droites $m'n$ passent par le pôle, par rapport au cercle o', de l'axe radical; car on sait que toutes les droites qui ont leurs pôles sur une autre droite passent par le pôle de cette droite.

Ce point fixe P est facile à déterminer; car on sait construire l'axe radical de deux circonférences, et déterminer le pôle d'une droite donnée, par rapport à une circonférence donnée.

Si les circonférences o et o' étaient sécantes ou intérieures, la même démonstration s'appliquerait.

Note. MM. Dehons, élève du lycée de Nîmes (classe Haillecourt), et Decourbes ont envoyé des solutions qui s'appuient sur les mêmes théorèmes que la solution précédente.

Ce concours est un point d'arrêt dans l'enseignement. Nous n'aurons probablement plus de semblables questions à enregistrer. Tous les géomètres connaissent les *Diverses solutions de la question de mathématiques élémentaires, proposée au concours général en* 1851 ; in-8°. L'auteur a gardé l'anonyme, mais l'on reconnaît la touche du maître.