DIEU

Concours d'agrégation aux lycées, année 1850

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 335-339

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__335_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION AUX LYCÉES, ANNÉE 1850;

PAR M. DIEU,

Agrege, docteur es sciences

COMPOSITION DE MÉCANIQUE.

Première question. *Un point matériel pesant glisse sans frottement sur une courbe liée à un axe vertical autour duquel elle tourne uniformément; on demande à quelle condition cette courbe doit être assujettie pour que le point glisse d'un mouvement uniforme.*

Seconde question. *Une droite sur laquelle un point matériel pesant glisse sans frottement, tourne uniformément autour d'un axe horizontal auquel elle est liée; déterminer le mouvement du point sur la droite.*

1°. Le mouvement du point sur la courbe tournant autour de l'axe est identique à celui qu'il aurait sur cette courbe rendue fixe, si on lui appliquait continuellement une force égale à la force centrifuge provenant de la rotation autour de l'axe; donc il s'agit de trouver la courbe pour laquelle la somme des composantes tangentielles de la force centrifuge et de la pesanteur est toujours nulle.

L'axe des z coïncidant avec l'axe vertical fixe et étant dirigé de bas en haut, si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point à la fin du temps t, par ds l'élément correspondant de la courbe, et par ω la vitesse angulaire constante autour de l'axe des z, la composante tangentielle de la pesanteur est $-g\dfrac{dz}{ds}$, et celle de la force centrifuge est $\omega^2\left(x\dfrac{dx}{ds}+y\dfrac{dy}{ds}\right)$, car les composantes de cette force suivant les directions des axes sont $x\omega^2$, $y\omega^2$ et o. Ainsi la courbe doit satisfaire à l'équation différentielle

$$g\,dz = \omega^2(x\,dx + y\,dy),$$

dont l'intégrale est

$$z - C = \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2),$$

qui représente un paraboloïde de révolution autour de l'axe fixe. Donc, la condition demandée est que :

La courbe engendre, en tournant autour de l'axe fixe, un paraboloïde dont la distance du foyer au sommet soit égale à $\frac{1}{2}\frac{g}{\omega^2}$.

2°. La droite fixe étant prise pour axe des x, et le plan du cercle de gorge de l'hyperboloïde engendré par la droite mobile A, pour celui des $\widehat{yz}$; l'axe des z sera vertical et dirigé de bas en haut, celui des y horizontal et dirigé de manière que la rotation de A autour de l'axe des x s'effectue de celui des y vers celui des z. Cela posé, soient :

- ω la vitesse angulaire constante avec laquelle A tourne autour de l'axe des x;
- r le rayon du cercle de gorge de l'hyperboloïde, égal à la plus courte distance de ces deux droites,
- a l'x d'un point B de A;
- R la distance de B à l'axe des x;
- δ l'angle que la projection de R sur $\widehat{yz}$ fait avec l'axe des y quand $t = 0$;
- α l'angle constant que A fait avec l'axe des x, et, à la fin du temps t, β, γ les angles (variables) que A fait avec les deux autres axes de coordonnées;
- x, y, z les coordonnées du mobile, à la fin du temps t;
- s la longueur (prise avec le même signe que x) de la partie de A comprise entre le plan $\widehat{yz}$ et le point (x, y, z).

A la fin du temps t, qui sera compté à partir de l'instant où la droite A coupe Oy, les coordonnées du point où elle perce $\widehat{yz}$ sont

$$0, \quad r\cos\omega t, \quad r\sin\omega t;$$

et celles de B sont

$$a, \quad \mathrm{R}\cos(\delta + \omega t), \quad \mathrm{R}\sin(\delta + \omega t);$$

donc

$$\cos\beta = \cos\alpha . \frac{R\cos(\delta + \omega t) - r\cos\omega t}{a},$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha . \frac{R\sin(\delta + \omega t) - r\sin\omega t}{a},$$

et

$$y = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} x + r\cos\omega t, \quad z = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha} . x + r\sin\omega t.$$

D'ailleurs, en prenant convenablement le sens des x positives, on a

$$x = s\cos\alpha.$$

Les composantes parallèles aux axes de la force centrifuge sont, pour le point (x, y, z),

$$0, \quad \omega^2 y, \quad \omega^2 z;$$

donc la composante de cette force suivant la droite A est exprimée par

$$\omega^2 (y\cos\beta + z\cos\gamma),$$

ce qui revient à

$$\omega^2 \left(s . \sin^2\alpha + r\cos\alpha . \frac{R\cos\delta - r}{a} \right),$$

d'après les équations précédentes, et eu égard à ce que $\cos^2\beta + \cos^2\gamma = \sin^2\alpha$.

Enfin, la composante de la pesanteur g suivant la droite A est

$$- g\cos\alpha . \frac{R\sin(\delta + \omega t) - r\sin\omega t}{a}.$$

D'après cela, l'équation du mouvement suivant la droite A est

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - \omega^2 \sin^2\alpha . s = - g\cos\alpha . \frac{R\sin(\delta + \omega t) - r\sin\omega t}{a}$$
$$+ r\omega^2 \cos\alpha . \frac{R\cos\delta - r}{a}.$$

On voit facilement que, C, C′ désignant deux constantes arbitraires, l'intégrale de cette équation est

$$s = Ce^{\omega t \sin\alpha} + C'e^{-\omega t \sin\alpha}$$
$$+ g \cos\alpha . \frac{R \sin(\delta + \omega t) - r \sin \omega t}{a\omega^2(1 + \sin^2\alpha)} - \frac{r\cos\alpha . (R\cos\delta - r)}{a \sin^2\alpha}$$

(e est la base des logarithmes népériens); et, par suite, on a, en désignant par v la vitesse du mobile à la fin du temps t,

$$v = \omega \sin\alpha . \left(Ce^{\omega t \sin\alpha} - C'e^{-\omega t \sin\alpha}\right)$$
$$+ g \cos\alpha . \frac{R\cos(\delta + \omega t) - r \cos \omega t}{a\omega(1 + \sin^2\alpha)}.$$

Ces deux formules donneront les valeurs de s, v, à un instant quelconque, quand on aura déterminé C, C′, d'après les valeurs initiales; elles feront par conséquent connaître le mouvement du point matériel sur la droite A, dont la position sera déterminée par les coordonnées du point où elle perce le plan $\widehat{yz}$, et les valeurs correspondantes de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, ou, si l'on aime mieux, on calculera x, y, z au moyen des équations qui ont d'abord été posées.

Si C $\gtrless$ o, le terme qui contient $e^{\omega t \sin\alpha}$, comme facteur, finira toujours par dominer dans les valeurs de s et de v qui croîtront indéfiniment avec t.

Si C = o, ce seront au contraire les termes contenant les lignes trigonométriques qui domineront à la longue, de sorte que le mouvement tendra à devenir oscillatoire.
