Théorème de M. Joachimsthal sur les lignes géodésiques des surfaces du second degré, à centre ; d'après M. le professeur Graves, à Dublin

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 322-323

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__322_1>

THÉORÈME DE M. JOACHIMSTHAL SUR LES LIGNES GÉODÉSIQUES DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ, A CENTRE;

D'APRÈS M. LE PROFESSEUR GRAVES, A DUBLIN.

(Journal de M. Crelle, t. XLII, p. 279; 1851; en anglais.)

1. *Lemme.* ACB est le chemin le plus court pour aller du point A au point B, en passant par le point C situé sur une droite, dans l'espace, lorsque AC et BC sont également inclinés sur cette droite.

2. *Lemme.* Deux tangentes menées, par le même point, à une surface du second degré *à centre*, sont proportionnelles aux demi-diamètres parallèles à ces tangentes.

3. *Lemme.* P et Q étant les points de contact de deux plans tangents à une surface du second degré à centre, la perpendiculaire abaissée de P sur le plan Q est à la perpendiculaire abaissée du centre sur le même plan Q, comme la perpendiculaire abaissée de Q sur le plan P est à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan P.

Démonstration. La proposition est évidente pour la sphère. Par la méthode *métamorphique*, on étend là proposition à une surface quelconque du second degré.

4. *Lemme.* P et Q étant les points de contact de deux plans tangents à une surface du second degré; L la droite

d'intersection de ces deux plans; S un point de cette droite tel, que PS et QS soient également inclinés sur L; les droites PS et QS sont proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du centre sur les plans tangents en P et en Q.

Démonstration. Les droites PS et QS sont évidemment proportionnelles aux perpendiculaires abaissées de P et de Q sur la droite L, et par conséquent aux perpendiculaires abaissées de P et de Q sur les plans tangents en Q et en P; donc (*lemme* 3) les droites PS et QS sont proportionnelles aux perpendiculaires abaissées du centre sur les plans Q et P.

5. *Corollaire.* Les droites PS et QS sont des tangentes à la surface; donc (*lemme* 2). les demi-diamètres parallèles à PS et à QS sont proportionnels aux perpendiculaires abaissées de P et Q sur les plans P et Q; autrement, la perpendiculaire abaissée de P sur le plan Q, multipliée par le demi-diamètre parallèle à PS, est égale à la perpendiculaire abaissée de Q sur le plan P, multipliée par le demi-diamètre parallèle a QS.

Observation. Le chemin PSQ est le plus court pour aller de P à Q en touchant la droite L (*lemme* 1).

6. Théorème de Joachimsthal. *Soit un point* P *situé sur une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré à centre; menons en* P *la tangente à la courbe et le plan tangent à la surface; la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, multipliée par le demi-diamètre parallèle à la tangente, donne un produit constant.*

Démonstration. Soient P, S, Q trois points consécutifs sur la ligne géodésique. Ayant égard au corollaire et à l'observation qui précèdent, le théorème devient évident. (Voir *Journal de Mathématiques*, t. XI, p. 22; 1846.)