H. FAURE

Solution de la question 148

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 316-319

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__316_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 148

(voir t VI p 216),

PAR M. H. FAURE,
Lieutenant d'artillerie.

La rectification de la courbe, lieu géométrique d'un point tel que si, de ce point, on mène deux tangentes à une ellipse, l'angle qu'elles font entre elles soit constant, dépend des fonctions elliptiques. (STREBOR.)

Supposons l'ellipse rapportée à ses axes $2a$, $2b$, soit

m la tangente de l'angle constant ; l'équation du lieu géométrique est

$$[x^2+y^2-(a^2+b^2)]m = 2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2},$$

ou en coordonnées polaires,

$$\rho^4 - 2\rho^2\left(c^2+\frac{4e^2\sin^2\omega+4b^2}{m^2}\right)+c^4-\frac{4a^2b^2}{m}=0,$$

en posant

$$a^2+b^2=c^2, \quad a^2-b^2=e^2.$$

Cette équation est de la forme

$$\rho^4-2\rho^2 f(\omega)+k^4=0.$$ (*Voir* tome IX, page 142.)

Soit ds l'élément de la courbe, on aura

$$ds=\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}\,d\omega.$$

Si l'on différentie l'équation donnée, on trouve

$$2\rho^2 d\rho - 2f(\omega)\,d\rho - \rho f'(\omega)\,d\omega = 0,$$

$f'(\omega)$ étant la dérivée de $f(\omega)$. On tire de là

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2=\frac{\rho^2[f'(\omega)]^2}{4\{\rho^4+[f(\omega)]^2-2\rho^2 f(\omega)\}}:$$

mais, d'après l'équation,

$$\rho^4-2\rho^2 f(\omega)=-k^4;$$

donc

$$\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2=\frac{\rho^2[f'(\omega)]^2}{4\{[f(\omega)]^2-k^4\}},$$

et

$$\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2=\frac{\rho^2\{4[f(\omega)]^2+[f'(\omega)]^2-4k^4\}}{4\{[f(\omega)]^2-k^4\}},$$

puis

$$ds=\frac{\rho\,d\omega}{2}\sqrt{\frac{4[f(\omega)]^2+[f'(\omega)]^2-4k^4}{[f(\omega)+k^2][f(\omega)-k^2]}}.$$

D'un autre côté, l'équation de la courbe donne

$$\rho = \sqrt{f(\omega) \pm \sqrt{[f(\omega)]^2 - k^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{f(\omega) + k^2} \pm \sqrt{f(\omega) - k^2}\right),$$

en faisant disparaître les radicaux superposés.

Il vient finalement

$$ds = \frac{d\omega}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{f(\omega) + k^2} \pm \sqrt{f(\omega) - k^2}\right)\sqrt{\frac{4[f(\omega)^2 + [f'(\omega)]^2 - 4k^4}{[f(\omega) + k^2][f(\omega) - k^2]}}$$

Si donc s et s' représentent les deux arcs qui répondent à la même valeur de l'angle ω, on trouvera

$$s + s' = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{\frac{4(f\omega)^2 + (f'\omega)^2 - 4k^4}{f(\omega) - k^2}}\,d\omega,$$

$$s - s' = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\sqrt{\frac{4(f\omega)^2 + (f'\omega)^2 - 4k^4}{f(\omega) + k^2}},$$

ainsi que l'annonce M. W. Roberts à l'endroit cité.

Dans le cas qui nous occupe, $f(\omega)$ est de la forme

$$A + B\sin^2\omega;$$

de sorte que $f'(\omega) = 2B\sin\omega\cos\omega$. On verra alors que le numérateur commun aux expressions de $s + s'$ et $s - s'$ sera de la forme

$$D + C\sin^2\omega,$$

la quatrième puissance du sinus disparaissant. Quant au dénominateur, il sera évidemment de la forme

$$E + B\sin^2\omega.$$

Or, l'on sait qu'une intégrale de la forme

$$z = \int\frac{\sqrt{D + C\sin^2\omega}}{\sqrt{E + B\sin^2\omega}}\,d\omega$$

dépend des fonctions elliptiques.

La seconde partie du théorème de M. W. Roberts, qui est relative aux courbes sphériques, se démontre d'une manière analogue à celle que nous venons de donner ici ; il suffit de se rappeler que dans ce système on a

$$ds = \sqrt{\sin^2 \rho + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2}\, d\omega \ (*).$$