PH. BÉDOS

Question 248 (Goldbach)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 11 (1852), p. 278-280

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1852_1_11__278_1>

QUESTION 248 (GOLDBACH);

PAR M. PH. BÉDOS,
Élève en mathématiques supérieures, maison de l'Assomption à Nîmes.

$4mn - m - 1$ ne peut être un carré (sous-entendu m et n étant des nombres entiers).

Démonstration. Soit $4mn - m - 1 = a^2$. Si je diminue m et n de m'' et n'', le premier membre de cette équation diminuera de $4mn'' + 4nm'' - 4m''n'' - m''$, et pour qu'après cette diminution l'expression devienne $(a-1)^2$, il faut que

$$4mn'' + 4nm'' - 4m''n'' - m'' = 2a - 1.$$

De cette équation je tire

$$4n'' = \frac{(4mn - 1)m'' - 2a + 1}{m'' - m},$$

$$4n'' = 4n - 1 + \frac{4mn - m - 2a + 1}{m'' - m};$$

et, en posant

$$m'' = 4mn - 2a + 1,$$

on a

$$n'' = n.$$

On a donc pour m'' et n'' des valeurs entières; d'où il suit que si a^2 est un carré contenu dans la formule donnée,

$(a - 1)^2$ y sera aussi contenu. On arrivera ainsi aux premiers carrés 4 et 1. En posant

$$4mn - m - 1 = 1,$$

on a

$$m = \frac{2}{4n - 1},$$

équation résolue en nombres entiers en faisant

$$n = 0, \quad m = -2.$$

Mais si je pose

$$4mn - m - 1 = 4,$$

d'où

$$m = \frac{5}{4n - 1},$$

cette équation ne peut être résolue en nombres entiers.

Donc la formule donnée ne peut contenir le carré 4 ni aucun carré supérieur; elle contient le carré 1, et aussi, si l'on veut, le carré 0, en faisant $n = 0$ et $m = -1$.

Démonstration d'Euler.

1. *Lemme.* La somme de deux carrés n'admet pas de diviseur de la forme $4n - 1$ (Fermat).

2. L'équation

$$4mn - m - 1 = a^2$$

est impossible; il s'ensuivrait que

$$m = \frac{a^2 + 1}{4n - 1},$$

ce qui est contraire au théorème précédent.

3. *Corollaire.* $\frac{a^2 + 1}{4n - 1}$ est un nombre fractionnaire: donc

$$\frac{a^2 + 1}{4n - 1} + 1 = \frac{a^2 + 4n}{4n - 1}$$

est aussi un nombre fractionnaire, ou bien

$$\frac{b^2+n}{4n-1} = \text{nomb. fract.};$$

de là

$$\frac{b^2+n}{4n-1}+n = \frac{b^2+4n^2}{4n-1} = \text{nomb. fract},$$

ou bien

$$\frac{c^2+4^2}{4n-1} = \text{nomb. fract.};$$

de là

$$\frac{c^2+n^2}{4n-1}+n^2 = \frac{c^2+4n^3}{4n-1} = \text{nomb. fract.},$$

ou

$$\frac{d^2+n^3}{4n-1} = \text{nomb. fract.};$$

et, en général,

$$\frac{a^2+n^\alpha}{4n-1}$$

ne peut être un nombre entier m, où α est un nombre entier positif; donc l'équation

$$4mn - m - n^\alpha = a^2$$

est impossible; ainsi $a^2 + n^\alpha$ n'admet pas de diviseur de la forme $4n - 1$.

4. Euler se sert du signe $\pm$ pour désigner l'impossibilité; ainsi $x^m + y^m \pm z^m$, lorsque m n'est pas égal à 2, exprime un théorème de Fermat. Ce signe très-commode est de Goldbach; il n'a été admis, que je sache, que par Euler. C'est une impossibilité d'un autre genre que l'imaginarité.